

## TÍTULO DO ARTIGO:

# Convergência em renda implica em convergência em desigualdade e pobreza? Um estudo para Minas Gerais

***Márcio Antônio Salvato***

*Doutor em Economia* pela EPGE-FGV/RJ

Professor da PUC Minas e Ibmecc Minas

Coordenador do Curso de Economia de Empresas da PUC Minas Virtual

Coordenador de Pesquisas do Instituto de Desenvolvimento Humano Sustentável da PUC

***Jonathan de Souza Matias***

*Bacharel em Economia* pela PUC Minas

## RESUMO

Vários são os estudos teóricos e empíricos que analisam a relação entre crescimento, desigualdade e pobreza, seja por modelos de determinantes do crescimento, modelos de elasticidade da redução da pobreza, modelos de determinantes da desigualdade, dentre outros. A partir de Solow (1956), inicia-se uma seqüência de estudos relacionados à renda e sua distribuição, levando a outros estudos mais inovadores que, hoje, procuram encontrar a existência de processos de catching up e formação de clubes de convergência em renda per capita entre as regiões e países. Sabendo-se que as medidas de desigualdade e pobreza dependem da distribuição de renda e que um processo de convergência é caracterizado por uma mudança específica da distribuição, questiona-se se esta mudança é suficiente para gerar convergência em desigualdade e em pobreza. Desta forma, inova-se a aplicabilidade das metodologias utilizadas no teste de convergência em renda para outras variáveis (no caso o índice de Theil-L e FGT (0)). Este artigo se propõe analisar esta questão empiricamente, usando o método de Cadeias de Markov para o caso discreto a partir das informações municipais dos censos de 1991 e 2000 para o estado de Minas Gerais. Como principal resultado destaca-se a baixa sensibilidade da densidade do índice Theil-L, mesmo com a observação de clubes de convergência em renda per capita e em pobreza para municípios e mesorregiões. Ou seja, a ocorrência de convergência de renda entre municípios não é suficiente para observar uma melhora na distribuição de desigualdade de renda interna dos mesmos, não melhorando assim de forma equitativa a renda entre os pobres e os não pobres.

## PALAVRAS CHAVE

Convergência, renda, pobreza, desigualdade, Cadeias de Markov

## ÁREAS/SUB-ÁREAS DO CONHECIMENTO

1. C2: econometric methods: single equation models; single variables/C21: cross-sectional models; spatial models; treatment effect models.
2. I3: welfare and poverty/I32: measurement and analysis of poverty

# Convergência em renda implica em convergência em desigualdade e pobreza? Um estudo para Minas Gerais

Márcio Antônio Salvato  
Jonathan de Souza Matias

## 1. INTRODUÇÃO

Nas duas últimas décadas intensificaram-se as discussões teóricas e aplicações empíricas que estudam a tríade crescimento-desigualdade-pobreza. Kuznets (1955) abriu a discussão sobre a relação entre desigualdade e crescimento propondo a famosa relação em formato de U invertido. Solow (1956) iniciou a discussão de modelos de convergência de renda a partir de modelagem do comportamento dos agentes econômicos. Desde então, as medidas de desigualdade ou sua variação passaram a serem usadas nos modelos de determinantes da renda e crescimento. Mais recentemente, modelos de decomposição da pobreza evidenciam que o crescimento e a redistribuição de renda são essenciais para redução da pobreza.

Há de se esperar que mudanças na distribuição de renda afetem as medidas de pobreza e as de desigualdade, uma vez que estas são construídas a partir da distribuição de renda. Desta forma, se os processos de *catching up* e clubes de convergência em renda afetam a distribuição da renda, então necessariamente afetam a desigualdade e pobreza. Mas a questão é: deve-se esperar que a convergência em renda cause convergência nas medidas de desigualdade e pobreza? Baseado apenas nos resultados de Kuznets (1955) e Solow (1956), a princípio não há porque esperar que convergência em renda seja suficiente para determinar uma convergência em desigualdade. Contudo, se for observado convergência em renda e também em desigualdade (com redução da desigualdade em relação à média), deve-se esperar uma convergência em pobreza, uma vez que estes são os principais determinantes da variação da pobreza (DATT e RAVALLION, 1992).

Este trabalho tentará contribuir para essa questão apresentando uma aplicação empírica de um modelo de convergência baseado apenas em Cadeias de Markov de primeira ordem para o caso discreto, que é aplicável a qualquer variável estocástica com dinâmica temporal. O modelo requer apenas a observação da densidade amostral em dois períodos no tempo. A partir da estimação de uma matriz de probabilidade de transição de estados da natureza é possível construir a densidade estimada para  $k$  períodos à frente, além da densidade ergódica (no estado estacionário) e da velocidade de convergência.

Vários são os trabalhos que estudam a convergência de renda *per capita* entre regiões e países usando diversas abordagens paramétricas ( $\beta$ -convergência e  $\sigma$ -convergência) e não-paramétricas. Dentre os trabalhos mais recentes utilizando dados da década de 1990 para os municípios brasileiros podem-se citar: Stulp e Fochezatto (2004), Silva *et all* (2005), Laurini *et all* (2005), Ribeiro e Porto Júnior (2006), Salvato *et all* (2006), Figueiredo *et all* (2006), Gondim (2006).

A evolução das densidades municipais observadas em 1991 e 2000 para Minas Gerais será utilizada para estimar a matriz de probabilidade de transição para as medidas de desigualdade e pobreza, além da renda *per capita*. A metodologia será aplicada utilizando como estudo de caso tanto os municípios do estado de Minas Gerais quanto suas mesorregiões. Formalmente, irá ser testada a convergência de renda *per capita*, do índice L de Theil e do FGT (0) – proporção de pobres – entre os municípios e entre as mesoregiões.

Além dessa introdução, o artigo segue na segunda seção apresentando os trabalhos teóricos e empíricos sobre a relação entre crescimento, desigualdade e pobreza, além da discussão dos conceitos e técnicas sobre os indicadores escolhidos para a aplicação da

metodologia. Na terceira seção é apresentada a metodologia de Processos de Markov de primeira ordem. Na quarta aplicamos o modelo para as densidades amostrais por município e mesorregiões de Minas Gerais com as informações censitárias de 1991 e 2000, apresentando as principais conclusões na última seção.

Como principais resultados encontrados neste trabalho podem-se citar: *i*) clubes de convergência de renda *per capita* entre os municípios e mesorregiões; *ii*) não-convergência (não converge nem diverge) do índice de Theil-L entre os municípios e divergência entre as mesorregiões; *iii*) divergência entre os municípios e forte formação de clubes de convergência entre as mesorregiões, no que tange à proporção de pobres.

Com tais resultados, pode-se afirmar que os municípios e as mesorregiões que melhoraram sua renda *per capita* em relação aos demais, tenderam a convergir também para níveis de pobreza menores. Mas em relação à desigualdade entre as pessoas internamente, cada qual tende a seguir seu nível de estrutura de distribuição de renda, sendo pouco sensível à mudança da densidade de medidas de renda *per capita*. Ou seja, não há uma ligação direta entre a ocorrência de convergência de renda entre municípios e uma melhora na distribuição de desigualdade de renda interna dos mesmos.

## 2. CRESCIMENTO, DESIGUALDADE E POBREZA

O crescimento econômico está na pauta de discussão desde a idéia mercantilista de que crescer gera riqueza para as nações (SOUZA, 1999). Solow (1956) foi o pioneiro na tentativa de modelar o comportamento dos agentes econômicos para explicar o crescimento das nações. E tanto gastou com seu esforço para tentar elaborar uma teoria empírica que explicasse o determinante do crescimento das economias que gerou várias outras questões, tais como: por que algumas nações são ricas, enquanto outras são pobres? Ou por que alguns países têm taxas de crescimento maior do que outros? Tentando responder questões como essas, sugeriram modelos introduzindo a idéia de convergência de renda, na qual o crescimento econômico é diferente de acordo com o nível de desenvolvimento inicial das nações, descrito pela distância de sua razão capital-trabalho do nível de *steady-state*. Assim, se a razão capital-trabalho estiver abaixo do nível de estado estacionário, sua taxa de crescimento será maior, diminuindo à medida que se aproxima do estado estacionário.<sup>1</sup> Esta dinâmica resultante do modelo produz um efeito *catching up*, em que países mais pobres tendem a crescer mais rápido que países mais ricos.

A partir daí essa literatura avança classificando dois tipos de convergência: absoluta e relativa. A questão é saber se as economias tendem a convergir em direção ao mesmo nível de renda ou se existem padrões de convergências para grupos diferentes. Baumol (1986) testou o modelo de Solow, usando uma amostra de 16 países industrializados, gerando resultados de convergência absoluta. De Long (1988) critica os resultados de Baumol, argumentando que a amostra selecionada era constituída somente de países desenvolvidos, tendo em seu modelo, portanto, um viés de seleção. Usando a argumentação do modelo de Solow, os países selecionados tinham estados estacionários semelhantes, por apresentarem padrões tecnológicos, de investimento e de crescimento populacional muito similares.<sup>2</sup> Segundo o mesmo autor, o mesmo resultado não seria alcançado se a amostra incluir países com padrões diferenciados, implicando que o modelo, supondo hipótese de convergência, deve ser controlado para efeitos específicos (iniciais). A partir dessa discussão, vários estudos empíricos foram desenvolvidos para testar a hipótese de convergência, com diferentes metodologias, seja paramétricas ou não-paramétricas.<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Ver Jones (2000), Souza (1999) e Barro e Sala-i-Martin (2003).

<sup>2</sup> Ver Baumol (1986).

<sup>3</sup> Ver Quah (1993), Barro e Sala-i-Martin (1991 e 1992), Laurini, Andrade e Pereira (2003), Fochezatto e Stulp (2004), Salvato *et all* (2006).

Kuznets (1955) foi pioneiro em discutir a relação crescimento-desigualdade. A hipótese de Kuznets é que existe uma relação entre crescimento e desigualdade de rendimentos na forma de um U invertido, ou seja, a desigualdade de renda piora nos estágios iniciais de desenvolvimento, mas reduz-se posteriormente. Desde então, vários desdobramentos teóricos buscaram dar robustez à proposição inicial de Kuznets, incluindo argumentos que vão desde a construção de índices de desigualdade setorial, passando por efeitos da migração, imperfeição no mercado de capitais, até a inclusão da tecnologia como determinante da desigualdade de rendimentos.<sup>4</sup> Vários foram os trabalhos empíricos que testaram a hipótese de Kuznets, ou simplesmente a relação entre crescimento e desigualdade: Robinson (1976), Ahluwalia (1976), Bruno *et all* (1996), Fields (2001), Ravallion e Chen (1997), Barreto *et all* (2001), Salvato *et all* (2007a), dentre vários outros. Contudo, muitos são os problemas de omissão de variáveis, erros de especificação e viés de seleção nestas estimações. Apesar disto, a principal conclusão com respeito aos resultados dos trabalhos mais recentes é que relação entre crescimento e desigualdade não é sistemática, sendo muito susceptível ao método econométrico de estimação, ou à base de dados do exercício.

Nas duas últimas décadas, com a proposição de modelos de crescimento endógeno, vários trabalhos empíricos têm incluído a desigualdade (ou sua variação) como determinante do crescimento econômico. Banerjee e Duflo (2003) argumentam que quanto mais desigual um país ou região menor a taxa de crescimento do país, uma vez que se tem um desincentivo ao investimento pelo efeito negativo da redistribuição de renda sobre a acumulação de capital.<sup>5</sup> Persson e Tabellini (1994) argumentam que as políticas redistributivas e gastos públicos necessários para mitigar o problema da desigualdade não são benéficos ao crescimento, porque também produz menor acumulação de capital. Outros argumentos como a instabilidade sociopolítica e alta restrição de crédito, presentes num contexto de elevada desigualdade de renda, reduz o investimento na economia e por consequência, a taxa de crescimento.

Existe uma vasta literatura que explora os determinantes da pobreza e sua variação, mostrando que os principais determinantes estão ligados ao crescimento e à redistribuição de renda.<sup>6</sup> Pode-se afirmar que a pobreza tem dois determinantes imediatos: a escassez de recursos e a má distribuição dos recursos existentes. Conforme Barros, Henriques e Mendonça (2000, p.25) “*O Brasil, apesar de dispor de um enorme contingente de pessoas abaixo da linha de pobreza, não pode ser considerado um país pobre*”. Deste modo a escassez de recursos não pode ser considerada a variável que melhor explica os altos níveis de pobreza observados no Brasil, deixando assim para a má distribuição dos recursos existentes. Neste sentido, assim como no Brasil, a pobreza e a desigualdade em Minas Gerais são dois aspectos inter-relacionados, sendo variáveis que têm um alto grau de correlação.<sup>7</sup> Salvato *et all* (2007b) mostra que a elasticidade da redução da pobreza com respeito à redistribuição da renda é maior que a elasticidade com respeito ao crescimento. Além disso, Ravallion (2005) e Salvato *et all* (2007b) mostram que quanto maior a desigualdade de renda inicial de uma região ou país menor é a capacidade do crescimento em reduzir a pobreza.

Conforme se pode imaginar, sendo a pobreza e desigualdade dependentes da distribuição de renda, mudanças na mesma tendem a afetar tais medidas. Baseado na literatura de modelos de convergência de renda questiona-se se os movimentos de *catching up* ou de clubes de convergência que se observam em renda também se reproduzem sobre as medidas de pobreza e desigualdade. Quando falamos em convergência de renda, espera-se que a dispersão da distribuição de renda seja menor, mas as amostras são para dados agregados das

---

<sup>4</sup> Ver Barreto *et all* (2001) e Fields (2001).

<sup>5</sup> Ver Barreto *et all* (2001), Banerjee e Duflo (2003) e Bruno *et all* (1996).

<sup>6</sup> Ver Datt e Ravallion (1992), Ravallion (1994, 1995 e 1997).

<sup>7</sup> Ver Rocha (2000), Salvato *et all* (2007b) e Resende (2006).

rendas dos municípios e, portanto falamos de desigualdade entre os municípios. Será que também ir-se-á observar convergência nas medidas de desigualdade dos municípios? Será que também poder-se-á observar convergência nas medidas de pobreza dos municípios?

Extrapolando os resultados de Kuznets (1955) e de Solow (1956) não há uma resposta clara se dever-se-ia esperar convergência em medidas de desigualdade a partir de um processo de convergência de renda. Por outro lado, se for observado convergência em renda e também em desigualdade com redução desta, deve-se esperar uma convergência em pobreza, dado que estes são os principais determinantes da variação da pobreza.

## 2.1. Conceitos e técnicas de mensuração dos indicadores

### 2.1.1. Pobreza

Ao discutir pobreza, deve-se enfatizar que não há uma definição concisa na literatura. Sen (1981) *apud* Ferreira e Litchfield (2000) afirma que existem duas correntes teóricas, onde uma afirma que ser pobre está ligado a rendimentos baixos que impendem o indivíduo de ter acesso a bens e serviços básicos, sendo esta definida na literatura como *pobreza relativa*. Contudo, Hoffman (2000) afirma que se a definição de ser pobre depende da comparação da renda entre pobres e não-pobres, o conceito de pobreza confunde-se com o de desigualdade. Assim surge a segunda corrente, na qual se inclui Hoffman (2000), afirmando que é necessário utilizar a chamada *pobreza absoluta*, sendo invariante no tempo e dependente da renda, mas não diretamente. Tal conceito está ligado ao de *linha de pobreza*, sendo que ser pobre não será o indivíduo que tiver uma renda baixa em relação a uma fração da renda média da economia como propunha os primeiros, mas em relação a uma linha fixa para todos. Ainda conforme Hoffmann (2000), ser pobre está relacionado com as condições inadequadas de vida e rendimentos abaixo da linha da pobreza que impedem um indivíduo de ter acesso a bens e serviços básicos.

Os parâmetros denominados pela literatura como *linha de pobreza* e *linha de indigência* passam a desempenhar um importante papel quando se quer estimar a pobreza e a indigência em uma economia utilizando dados sobre a renda. Tais linhas consistem em um meio de determinar um limite, de forma que quem tiver uma renda *per capita* familiar abaixo desse limite é considerado pobre ou indigente, respectivamente. Segundo Rocha (2000), consideráveis avanços têm sido obtidos nas técnicas de construção de linhas de pobreza e de indigência, embora em alguns casos, têm sido utilizadas frações do salário mínimo para determiná-las. Rocha (2000) coloca ainda que a forma mais adequada de se iniciar a mensuração de tais linhas é obtendo informações sobre as preferências dos consumidores referentes ao aporte nutricional. Tal procedimento poderia ser feito pela otimização da cesta alimentar com informações sobre o conteúdo nutricional mínimo para a subsistência e levando em consideração o preço dos alimentos e a restrição orçamentária das famílias. Mas procedendo assim, obter-se-ia um valor subestimado para tal linha em países como o Brasil.

O que se observa ao comparar os resultados do Estudo Nacional da Despesa Familiar (Endef) do IBGE, realizado em 1987/75, e da Pesquisa de Orçamentos Familiares (POF) do IBGE, de 1987/88, é que, com a urbanização e a melhoria dos meios de comunicação, as escolhas alimentares das famílias têm se tornado cada vez menos ótimas quando se consideram estritamente o aporte nutricional e o preço dos alimentos. (ROCHA, 2000, p.109)

Isto se deve ao fato de outros bens (isto é, bens ineficientes para a nutrição) serem mais importantes para o consumidor no momento de definir sua cesta ótima. A consequência disto é uma cesta com valor mais elevado do que a cesta ótima onde se considera apenas o aporte nutricional mínimo.

Logo, Rocha (2000) esclarece que um valor ligado apenas ao aporte nutricional mínimo está relacionado ao conceito de *linha de indigência*. Mas somando-se a este os gastos transporte, habitação, vestuário e outros, chega-se a definição da *linha de pobreza*. Outra

maneira de estimar a linha de pobreza seria a utilização do Coeficiente de Engel. - "A literatura econômica consagrou a adoção do coeficiente de Engel<sup>8</sup> como elemento central na determinação da linha de pobreza" (ROCHA, 2000, p.25), calculada pelo inverso de tal coeficiente.<sup>9</sup> Mas sua utilização aponta valores bastante elevados para o Brasil, o que, tanto no caso da otimização da cesta quanto neste, se torna inviável e pouco útil operacionalmente. Logo, a forma de mensurar tal linha irá depender tanto dos objetivos específicos do pesquisador quanto da base de dados.

Definida a linha de pobreza é possível dividir os indivíduos de uma sociedade entre pobres e não-pobres (MANSO, BARRETO e TEBALDI, 2006), e com ela vários índices de pobreza são estimados. Um dos estimadores mais utilizados na literatura para medir a pobreza em uma determinada região é o FGT( $\alpha$ ).

$$FGT(\alpha) = \int_0^{H_1} \left( \frac{z - y_i(p)}{z} \right)^\alpha dp \quad (1)$$

em que  $z$  é a linha de pobreza,  $\alpha$  é um parâmetro que define o índice FGT. Se  $\alpha = 0$ , o índice mede a *proporção de pobres* na região,  $FGT(0) = H_1$ . Se  $\alpha = 1$ , temos a *intensidade da pobreza* na região, isto é, o quão longe está a renda média dos pobres ( $y_i(z)$ ) da linha da pobreza ( $z$ ),  $FGT(1) = \int_0^{H_1} \left( \frac{z - y_i(p)}{z} \right) dp = H_1 \cdot \left( \frac{z - y_i(p)}{z} \right)$ . Se  $\alpha = 2$ , o indicador é chamado de *hiato quadrático* e descreve como é distribuída a renda entre os pobres,

$$FGT(2) = \int_0^{H_1} \left( \frac{z - y_i}{z} \right)^2 dp.^{10}$$

Outros índices podem ser utilizados na medição de pobreza, tais como o índice de Watts ou o índice de Sen, como afirmam Manso, Barreto e Tebaldi (2006). Mas não serão utilizados neste artigo.

Neste trabalho utiliza-se o FGT(0), calculado pela Fundação João Pinheiro e disponibilizado no Atlas de Desenvolvimento Humano no Brasil para os anos de 1991 e 2000, para se testar se está havendo aproximação da proporção de pobres entre os municípios e as mesorregiões mineiras, conforme metodologia de processo de Markov, descrita na próxima seção.

### 2.1.2. Desigualdade e renda *per capita*

O conceito de desigualdade é eminentemente relativo, de modo que pode ser considerado o oposto do conceito de igualdade, o qual tem várias definições dependendo do contexto. Conforme Prates e Wajzman (1996), diremos que a distribuição dos dados é desigual, do ponto de vista estatístico, se concorda com um critério previamente estipulado. A repartição de uma variável é justa ou injusta de acordo com a repartição teórica que se pode derivar a partir da aplicação de uma norma em que se expressa o critério de equidade utilizado (PRATES e WAJZMAN, 1996). Logo, definem-se os critérios a serem seguidos pela distribuição e elabora-se um indicador como forma de mostrar qual o grau de desigualdade na distribuição dos dados.<sup>11</sup>

<sup>8</sup> Relação entre despesas alimentares e despesa total.

<sup>9</sup> Basta multiplicar o valor da linha de indigência que considera uma cesta de consumo para atender um mínimo nutricional pelo inverso do coeficiente de Engel, obtendo assim, a linha de pobreza.

<sup>10</sup> Ver Ferreira e Litchfield (2000).

<sup>11</sup> É preciso frisar que alguns autores afirmam que o conceito de desigualdade está além de desigualdade de renda, havendo também a desigualdade de possibilidade de acesso a outros recursos necessários a vida humana.

Desta forma, foi utilizando este conceito estatístico que se iniciou a busca por definir um indicador matemático que demonstrasse se a distribuição da renda *per capita* é desigual e caso seja, em que grau se encontra. Muitos indicadores tornaram-se universais na literatura como forma de mensurar tal equidade. Mas antes de descrevê-los, Prates e Wajnman (1996) afirmam que para que um indicador seja “bom” e estatisticamente significativo para evidenciar a desigualdade, este deve seguir 5 (cinco) requisitos mínimos: 1) ser sensível a mudanças de escala ou transformações proporcionais; 2) ser sensível à mudança no tamanho da população; 3) captar a transferência de renda dos ricos para os pobres quando esta acontecer; 4) maior sensibilidade à transferência de renda entre as pessoas situadas na calda inferior da distribuição (do que as transferências de renda em outras partes da distribuição); 5) ser decomponível em duas partes, de forma que uma mostrará a desigualdade entre as regiões, enquanto a outra mostrará a desigualdade interna da região, ou seja, ser passível de uma reengenharia inversa.<sup>12</sup>

Conforme ressalta Barro *et all* (1993) *apud* Prates e Wajnman (1996), a escolha da unidade de análise e do conceito de renda (como *per capita* ou *nacional*) afetam diretamente a construção da distribuição de renda, que por sua vez, interferem nas medidas de desigualdade e pobreza. Neste trabalho utilizaremos o conceito de renda *per capita*.

### Os índices de Theil

Os índices de Theil, quais sejam o Theil-L e o Theil-T, derivam da noção de Entropia Generalizada (EG) na teoria da informação pela qual a “... quantidade de informação recebida de um evento *E* é inversamente proporcional à sua probabilidade de ocorrência  $p$ ...” (PRATES e WAJNMAN, 1996, p.29).

Segundo Ferreira e Litchfield (2000), baseado na renda do *i*-ésimo indivíduo ( $y_i$ ), da renda *per capita* ( $y^*$ ) e do tamanho da população ( $n$ ) os índices L e T de Theil podem ser obtidos por:

$$EG(0) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln \left( \frac{y_i}{y^*} \right) = \text{Theil-L} \quad (2)$$

$$EG(1) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{y_i}{y^*} \ln \left( \frac{y_i}{y^*} \right) = \text{Theil-T} \quad (3)$$

De acordo com Prates e Wajnman (1996), o índice de Theil é a melhor estimativa dentre todos os índices utilizados na literatura, dado que além de estar de acordo com todos os requisitos para um bom estimador de desigualdade, é o único que é decomponível. Neste artigo usaremos a medida do Theil-L.<sup>13</sup>

### 3. CONVERGÊNCIA: PROCESSO DE MARKOV

Para estudar a hipótese de convergência de renda entre os países e regiões vários são os procedimentos adotados na literatura, paramétricos e não-paramétricos. Quah (1993) mostra certas inconsistências nas estimações paramétricas que usam os conceitos de  $\beta$ -convergência e  $\sigma$ -convergência. No caso do conceito de  $\beta$ -convergência a principal crítica está relacionada com a necessidade da hipótese básica neoclássica de retorno decrescente dos fatores produtivos, sendo esta a explicação para um parâmetro  $\beta$  negativo sob hipótese de convergência. O fato do parâmetro  $\beta$  ter que ser negativo também é muito criticado na

---

Contudo, utiliza-se apenas o conceito relativo à renda por facilitar a estimação dos indicadores e por ser o método mais utilizado na literatura.

<sup>12</sup> Ver-se-á à frente que o único indicador que respeita este último quesito para que seja “bom” é o índice de Theil, o qual foi utilizado para decompô-lo e para estimar o Theil das mesoregiões. Para mais, ver apêndice A.1.

<sup>13</sup> Para mais ver apêndice A.1.

literatura, recebendo o nome de *Falácia de Galton*.<sup>14</sup> Além disso, argumenta-se que a hipótese do progresso tecnológico e da taxa de poupança exógenos é questionável. Em relação à  $\sigma$ -convergência, Stulp e Forchezatto (2004) afirmam que este não serve para explicar se há ou não convergência, dado que apenas mostra se houve variação da dispersão dos dados de um período em relação ao outro em torno da média.

Neste trabalho será utilizada a metodologia de *Processos de Markov* de primeira ordem para o caso discreto. Esta é apropriada quando se utiliza a informação da amostra apenas em dois períodos no tempo, no que tange a uma região específica (no nosso caso municípios). Barro e Sala-i-Martin (2003) afirmam que em tal metodologia, além de não depender do comportamento da variável nas situações precedentes, pode-se, por meio dela, verificar dinâmicas de transição inter-classes, o que não é possível com a metodologia de  $\beta$ -convergência. Além disso, tais dinâmicas de transição podem ser estudadas para qualquer variável econômica independentemente de uma teoria de comportamento *a priori*. Desta forma, permite-nos aferir sobre o comportamento entre as unidades da amostra para a desigualdade de renda e pobreza, além dos tradicionais modelos de convergência construídos apenas para a renda, buscando apropriar das inter-relações entre estas variáveis já mencionadas.

O *processo de Markov* de primeira ordem consiste em uma situação em que o fenômeno estudado parte de um estado inicial passando ao próximo seguindo uma probabilidade, supostamente conhecida. É uma probabilidade de transição de um estado da natureza para outro, que depende apenas da situação imediatamente anterior, não dependendo dos processos passados. Segundo Boldrini (1986), uma seqüência desses processos é conhecida como *cadeias de Markov*.

Quah (1993) e Stulp e Forchezatto (2004) mostram que a utilização deste método para análise de convergência consiste em definir os estados da natureza como intervalos de classes padronizados pela média da distribuição da variável em questão, de tal forma que se pode construir uma matriz de probabilidades de transição entre estas classes. Isto implica na escolha de uma janela de classe, definida como “h”, que depende de um *trade-off* entre viés e variância: h muito pequeno reduz o viés, mas aumenta a variância e vice-versa. Assim, para definir o valor do intervalo de classe, é necessário obter informações quanto à distribuição dos dados da população, a qual normalmente não é conhecida. Contudo, sob normalidade, Magrini (1999) mostra que a janela ótima pode ser descrita pela equação:

$$h = 2,72sn^{-\frac{1}{3}} \quad (4)$$

em que  $s$  é o desvio-padrão da distribuição e  $n$  é o número de observações.

Para testar a normalidade dos dados, pode-se usar o teste de Kolmogorov-Smirnov ou de Jarque-Bera.<sup>15</sup> Uma vez definido  $h$ , observa-se a quantidade de classes necessárias para englobar o valor mínimo e o valor máximo da distribuição amostral, fazendo um controle para que não haja classe com representação nula no período inicial, pois caso ocorra, não será possível montar a matriz de Markov.<sup>16</sup> Em seguida, define-se a função densidade de probabilidade das observações para os dois anos do período (final e inicial), usando a frequência relativa dos municípios em cada classe, conforme uma metodologia de densidade de núcleo (*kernel density*) para o caso discreto. A função de densidade probabilidade é, neste caso, definida como:

$$f(x) = \frac{1}{nh} \sum_{i=1}^n I\left(x - \frac{h}{2} \leq x_i \leq x + \frac{h}{2}\right) \quad (5)$$

<sup>14</sup> Ver Barro e Sala-i-Martin (2003) e Quah (1993).

<sup>15</sup> Ver Judge *et al.* (1988). *Introduction and the Theory and Practice of Econometrics*, 3rd edn., 890–892.

<sup>16</sup> Ver Simon e Blume (2004).

em que  $h$  é o tamanho do intervalo de cada classe dos índices,  $x_i$  são as observações da amostra,  $I(\cdot)$  é a função indicadora que conta o número das observações dentro do intervalo especificado,  $n$  é o tamanho da amostra das observações e  $x$  representa o centro do intervalo das classes.

Obtida a matriz de probabilidade de transição entre os estados da natureza do processo, constrói-se uma equação em diferenças de primeira ordem,

$$F_{t+1} = MF_t$$

$$\begin{bmatrix} F_{1,t+1} \\ F_{2,t+1} \\ \dots \\ F_{n,t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} & \dots & P_{1n} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} & \dots & P_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ P_{n1} & P_{n2} & P_{n3} & \dots & P_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{1,t} \\ F_{2,t} \\ \dots \\ F_{n,t} \end{bmatrix} \quad (6)$$

em que  $F_{t+1}$  é a distribuição de frequência da variável em  $t+1$ ,  $F_t$  é a distribuição de frequência da variável em  $t$ ,  $M$  é a matriz de probabilidade de transição markoviana,  $p_{ij}$  é a probabilidade da variável observada estar no estado da natureza  $j$  no período  $t$  e passar para o

estado da natureza  $i$  no período  $t+1$ , assumindo que  $\sum_{i=1}^n p_{ij} = 1$  e  $j=1, \dots, n$ .

Esta técnica permite projetar a distribuição de probabilidade para  $k$  períodos à frente ou mesmo achar a distribuição ergótica (de longo prazo), resolvendo o sistema de equações em diferenças de primeira ordem. Além disso, permite-se calcular o tempo necessário para se

alcançar a metade do caminho até o estado estacionário:  $\tau = \frac{\ln(2)}{\ln(r)}$ , em que “ $r$ ” é o segundo

maior autovalor, exceto o unitário da matriz markoviana.

#### 4. RESULTADOS

Os testes de convergência de renda *per capita*, desigualdade e pobreza foram realizados entre todos os municípios de Minas Gerais e entre suas mesorregiões, usando os dados censitários de 1991 e 2000, disponíveis no Atlas do Desenvolvimento Humano da FJP (2003). Deve-se aqui ressaltar que, em alguns casos, não foi possível gerar a matriz de probabilidades de transição ou pela inexistência de municípios em determinadas classes pré-definidas no período inicial,<sup>17</sup> ou pela transição para classes inexistentes em 2000, de acordo com a distribuição inicial.<sup>18</sup> Além disso, a escolha dos intervalos de classe,  $h$ , seguiu um critério *ad hoc*, para valores próximos daqueles indicados pela equação (4), uma vez que o mesmo gerava, por muitas vezes, não estimação da matriz de probabilidades de transição, por causa dos problemas expostos acima. Tal critério seguiu a observação das estimações das funções de densidade de núcleo para o caso contínuo (*Kernel density*) para o  $h$  escolhido, comparando com o resultado do  $h$  ótimo. Assim se a forma contínua pouco alterava e possibilitava a estimação da matriz de probabilidades de transição, o mesmo era usado para o caso discreto, respeitando o *trade-off* entre viés e variância.

O método foi adotado para duas diferentes configurações da base de dados para o estado de Minas Gerais: 1) convergência entre municípios; 2) convergência entre mesorregiões. Ressalta-se que a aplicação da metodologia se dá considerando  $x$  o valor relativo de cada variável em relação à sua respectiva média, de modo que estão sempre nos referindo a desvios em torno da média.

<sup>17</sup> Não se pode definir  $P_{ij}$  porque o denominador é nulo.

<sup>18</sup> Isto faz com que a soma da coluna da matriz de Markov não totaliza 1, condição necessária para a metodologia.

## 4.1. Convergência entre municípios

### 4.1.1. Renda *per capita*

A partir dos dados dos 853 municípios de Minas Gerais para os anos de 1991 e 2000, disponibilizada pela FJP (2003), escolheu-se  $h=0,5$  e construí-se 7 classes, conforme Tabela 1, para a distribuição da renda *per capita* em torno da média. A matriz de Markov (transposta) se encontra na Tabela 2, apresentando as probabilidade de transição entre os 7 estados da natureza (classes de renda *per capita*).

**TABELA 1**  
Classes de renda *per capita* (relativa à média) em Minas Gerais por município

<i>n=853 municípios; h=0,5</i>		
<i>Classes</i>	<i>Li</i>	<i>Ls</i>
1	0,0	0,5
2	0,5	1,0
3	1,0	1,5
4	1,5	2,0
5	2,0	2,5
6	2,5	3,0
7	3,0	3,5

Fonte: Elaborada pelo autor.

**TABELA 2**  
Matriz de Markov (transposta) da renda *per capita* em Minas gerais por município

	1	2	3	4	5	6	7
1	0,79	0,06	0	0	0	0	0
2	0,21	0,79	0,12	0	0	0	0
3	0	0,15	0,78	0,44	0,07	0	0
4	0	0	0,09	0,51	0,29	0,33	0
5	0	0	0	0,05	0,64	0,67	0
6	0	0	0	0,01	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	1
$\Sigma$	1	1	1	1	1	1	1

Fonte: Elaborada pelo autor.

Na Tabela 3 encontram-se os valores da distribuição inicial dos dados, ou seja, a porcentagem contida na tabela indica a porcentagem de municípios que ocupam cada intervalo em 1991. Dada a matriz de markov e a distribuição inicial, monta-se um sistema de equações em diferenças finitas, tal como descrito na equação (7) abaixo, para que com sua solução obtenha-se os resultados da convergência.

**TABELA 3**  
Distribuição inicial da renda *per capita* em Minas Gerais por municípios

<i>Classes</i>	<i>Dist. Inicial</i>
1	7,85%
2	49,47%
3	30,36%
4	10,20%
5	1,64%
6	0,35%
7	0,12%

Fonte: Elaborada pelo autor.

$$\begin{bmatrix} F_{1,t+1} \\ F_{2,t+1} \\ F_{3,t+1} \\ F_{4,t+1} \\ F_{5,t+1} \\ F_{6,t+1} \\ F_{7,t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,79 & 0,06 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ 0,21 & 0,79 & 0,12 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & 0,15 & 0,78 & 0,44 & 0,07 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & 0,09 & 0,51 & 0,29 & 0,33 & 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,05 & 0,64 & 0,67 & 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,01 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 1,00 & 0,00 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{1,t} \\ F_{2,t} \\ F_{3,t} \\ F_{4,t} \\ F_{5,t} \\ F_{6,t} \\ F_{7,t} \end{bmatrix} \quad (7)$$

A tabela 4 apresenta a distribuição inicial, a solução do sistema para  $k=1,2,\dots,8$  períodos a frente <sup>19</sup> e a solução de equilíbrio (distribuição ergótica). A última coluna mostra que, baseado na dinâmica observada na década de 1990, há uma ligeira tendência de formação de clubes de convergência entre os municípios de Minas Gerais, para as classes 1, 3 e 7. Isto é, mantida a mesma evolução da década de 1990, alguns municípios tendem a reduzir sua renda *per capita* em torno da média, ficando relativamente mais pobres, tais como os que se encontram nas classes 4 e 5 reduzindo para a 3 e 1 e outros que se encontram na classe 2, reduzindo para a 1. Outros tendem a aumentar, quais sejam os que se estão na classe 2 migrando para a classe 3. A classe 7 continua inalterada, isto é, os poucos municípios relativamente mais ricos tendem a manter sua distância da média.

A idéia de uma convergência em clubes é quando a distribuição de probabilidade tende a apresentar mais de uma moda, o que ficou evidente na distribuição ergótica. O tempo necessário para que se atinja metade do caminho que separa a distribuição inicial da solução de equilíbrio no longo prazo é estimado para 36 anos, ou seja, uma convergência muito rápida. Tal evidência pode ser confirmada ao analisar a dinâmica de transição, na medida em que os períodos vão passando e tendendo rapidamente ao valor de longo prazo.

**TABELA 4**  
**Resultado da convergência da renda *per capita* em Minas Gerais por municípios**

Classes renda per capita			Solução da equação em diferenças para vários períodos									
	Li	Ls	Inicial	1	2	3	4	5	6	7	8	Infinito
1	0,0	0,5	7,85%	9,38%	10,28%	10,81%	11,11%	11,28%	11,36%	11,40%	11,40%	11,17%
2	0,5	1,0	49,47%	44,20%	41,02%	39,05%	37,80%	36,99%	36,45%	36,09%	35,84%	35,17%
3	1,0	1,5	30,36%	35,87%	38,68%	40,23%	41,15%	41,73%	42,10%	42,36%	42,54%	43,17%
4	1,5	2,0	10,20%	8,56%	8,19%	8,22%	8,34%	8,46%	8,56%	8,64%	8,70%	8,94%
5	2,0	2,5	1,64%	1,76%	1,60%	1,47%	1,39%	1,34%	1,31%	1,30%	1,30%	1,34%
6	2,5	3,0	0,35%	0,12%	0,10%	0,09%	0,09%	0,10%	0,10%	0,10%	0,10%	0,10%
7	3,0	3,5	0,12%	0,12%	0,12%	0,12%	0,12%	0,12%	0,12%	0,12%	0,12%	0,12%

Obs.: Tempo necessário para alcançar metade do caminho em direção ao estado estacionário:  $\ln(2)/\ln(\text{do maior autovalor, exceto o unitário}) = 36$  anos

Fonte: Elaborada pelo autor.

#### 4.1.2 Índice Theil-L

Como pôde ser visto, há uma tendência a um caminho de clubes de convergência de renda *per capita* e, portanto, uma redução da desigualdade entre os municípios mineiros, considerando a evolução observada na década de 1990. Contudo, a desigualdade interna de renda entre as pessoas de cada município também tende a algum valor? Isto é, os municípios que tendem a ter a disparidade de renda entre eles diminuída, tende a ter a mesma distribuição deste ganho? É o que será visto neste momento.

<sup>19</sup> Cada período no sistema de equações em diferenças representa 9 anos, uma vez que os dados de origem representam a variação da renda per capita entre 1991 e 2000.

Para a construção das distribuições inicial, final e da matriz de probabilidades de transição, escolheu-se um  $h=0,11$  para os índices de Theil-L normalizados em torno de sua média. A Tabela 5 apresenta a matriz de Markov estimada com base nas 15 classes gradadas, dado  $h$ .

**TABELA 5**  
**Matriz de Markov (transposta) do índice de Theil-L em Minas Gerais por municípios**

Classes	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	0,19	0,02	0,01	0,01	0,00	0,02	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
2	0,13	0,22	0,15	0,09	0,05	0,03	0,01	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
3	0,13	0,30	0,30	0,27	0,22	0,15	0,08	0,00	0,10	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
4	0,25	0,18	0,26	0,25	0,27	0,24	0,20	0,18	0,00	0,50	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
5	0,13	0,14	0,13	0,20	0,23	0,21	0,31	0,23	0,00	0,25	0,00	0,00	0,00	1,00	0,00
6	0,06	0,08	0,10	0,11	0,13	0,24	0,20	0,23	0,20	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	1,00
7	0,00	0,02	0,02	0,04	0,05	0,06	0,10	0,23	0,30	0,00	0,00	0,33	1,00	0,00	0,00
8	0,13	0,00	0,01	0,03	0,03	0,04	0,06	0,05	0,20	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
9	0,00	0,00	0,01	0,00	0,02	0,00	0,01	0,05	0,10	0,25	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
10	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,01	0,05	0,10	0,00	1,00	0,33	0,00	0,00	0,00
11	0,00	0,02	0,01	0,00	0,01	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,33	0,00	0,00	0,00
12	0,00	0,01	0,00	0,00	0,01	0,00	0,01	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
13	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
14	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,01	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
15	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
$\Sigma$	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00

Fonte: Elaborada pelo autor.

A Tabela 6 denota a solução do sistema de equações em diferenças até 8 períodos a frente, assim como as distribuições inicial e ergótica. O primeiro resultado que torna essa análise interessante é a velocidade com que o índice de Theil-L dos municípios mineiros irá alcançar a metade do caminho que o separa do nível de estado estacionário, mantendo tudo mais constante.

**TABELA 6**  
**Resultado da convergência do índice de Theil-L em Minas Gerais por municípios**

Classes renda per capita			Solução da equação em diferenças para vários períodos									
	Li	Ls	Inicial	1	2	3	4	5	6	7	8	INFINITO
1	0,58	0,68	1,88%	1,04%	1,17%	1,06%	1,04%	1,04%	1,04%	1,04%	1,04%	1,04%
2	0,68	0,79	10,55%	9,04%	8,68%	8,89%	8,98%	9,02%	9,03%	9,04%	9,04%	9,04%
3	0,79	0,89	15,71%	22,77%	22,16%	22,61%	22,70%	22,75%	22,76%	22,77%	22,77%	22,77%
4	0,89	1,00	25,67%	23,95%	23,56%	23,85%	23,97%	23,95%	23,95%	23,95%	23,95%	23,95%
5	1,00	1,11	20,63%	18,85%	19,58%	18,94%	18,90%	18,86%	18,85%	18,85%	18,85%	18,85%
6	1,11	1,21	12,19%	13,43%	13,72%	13,58%	13,45%	13,43%	13,43%	13,43%	13,43%	13,43%
7	1,21	1,32	8,32%	4,92%	5,28%	5,02%	4,92%	4,92%	4,92%	4,92%	4,92%	4,92%
8	1,32	1,42	2,58%	2,77%	3,05%	2,82%	2,77%	2,78%	2,78%	2,77%	2,77%	2,77%
9	1,42	1,53	1,17%	1,28%	1,17%	1,19%	1,29%	1,28%	1,28%	1,28%	1,28%	1,28%
10	1,53	1,63	0,47%	0,99%	0,59%	1,03%	1,00%	0,98%	0,98%	0,99%	0,99%	0,99%
11	1,63	1,74	0,12%	0,57%	0,59%	0,59%	0,57%	0,57%	0,57%	0,57%	0,57%	0,57%
12	1,74	1,85	0,35%	0,28%	0,35%	0,28%	0,28%	0,28%	0,28%	0,28%	0,28%	0,28%
13	1,85	1,95	0,12%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
14	1,95	2,06	0,12%	0,13%	0,12%	0,13%	0,13%	0,13%	0,13%	0,13%	0,13%	0,13%
15	2,06	2,16	0,12%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%

Obs.: Tempo necessário para alcançar metade do caminho em direção ao estado estacionário:  $\ln(2)/\ln(\text{do maior autovalor, exceto o unitário}) = 5$  anos

Fonte: Elaborada pelo autor.

Com apenas um período a variável alcança seu valor da distribuição ergótica. Isto porque a velocidade de convergência foi estimada para 5 anos até que se atinja a meia vida.<sup>20</sup>

A última classe deixa de ter municípios, indicando que municípios com valores extremamente elevados de nível de desigualdade de renda irão migrar para níveis menores. Contudo, não há evidências suficientes para afirmar que haverá convergência de níveis de desigualdade entre os municípios. Apesar da tendência de formação de clubes de convergência na variável renda *per capita*, o mesmo não ocorre para a variável de desigualdade de renda, indicando que a renda média convergiu, mas não necessariamente ocorreu redistribuição interna para os municípios.

#### 4.1.3 Proporção de pobres

Os dados da década de 1990 reforçam que a proporção de pobres reduziu praticamente em todos os municípios. Contudo, a redução de certos municípios foi muito menor do que a redução da média, causando um processo de divergência. O Gráfico 1 mostra como há um aumento da dispersão dos dados em torno da média, bem como mudança no valor modal, que passa para acima da média em 2000 dado que em 1991 estava abaixo.

Neste caso, a metodologia não pode ser aplicada, de acordo com o segundo caso exposto no início desse capítulo. Ou seja, há municípios que se afastaram muito da média em 2000 em relação à 1991. Com isso, têm valores que estão fora dos intervalos de classes construídos baseados, principalmente, no tamanho do intervalo (h). Este é, portanto, um resultado muito interessante, dado que há tendência à convergência em clubes da renda *per capita*, mas talvez pelo fato da renda interna de cada um não ser mais bem distribuída, a situação dos pobres tende a ficar mais distinta entre eles. Ou seja, a situação de pobres tende a piorar ou a melhorar menos do que a média.

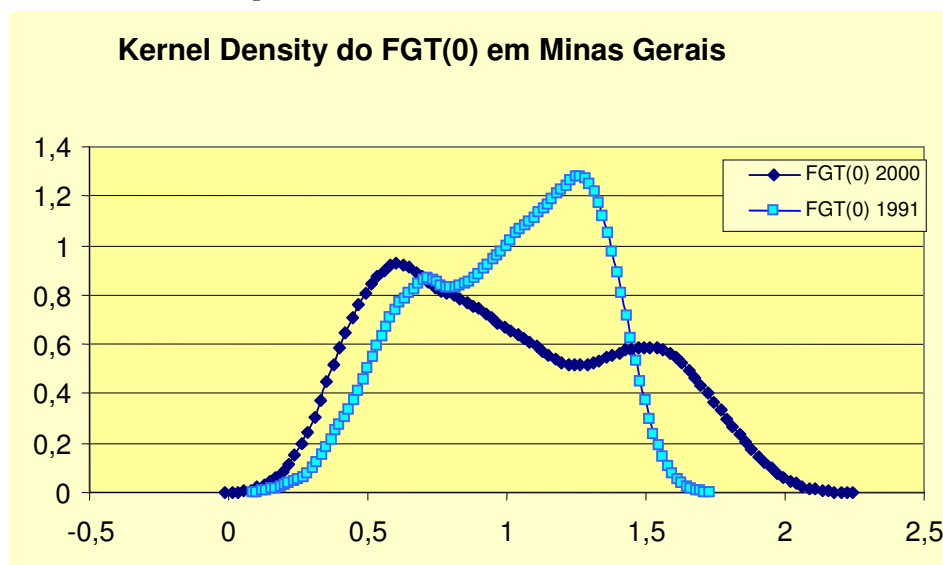


GRÁFICO 1: Distribuição da Proporção de Pobreza em 1991 e 2000.  
FONTE: Elaborado pelo autor.

## 4.2. Convergência entre mesorregiões

### 4.2.1 Renda *per capita*

A renda *per capita* de cada mesorregião foi obtida somando-se a renda de todos os municípios e dividindo o resultado pela soma de pessoas de todos os municípios que continham em cada uma delas, gerando assim a tabela 7.

<sup>20</sup> Deve-se enfatizar aqui que cada período tem um total de 9 anos (de 1991 à 2000).

**TABELA 7**  
**Renda per capita das mesorregiões de Minas Gerais**

Mesorregiões	Renda per capita em R\$	
	1991	2000
Campo das vertentes	113,86	176,53
Central Mineira	128,98	196,47
Jequitinhonha	74,69	103,67
Metropolitano BH	128,70	182,35
Noroeste de Minas	120,03	192,50
Norte de Minas	69,99	91,25
Oeste de Minas	142,09	225,83
Sul-Sudoeste de Minas	157,64	235,52
Triângulo Mineiro	185,77	262,01
Vale do mucuri	75,20	108,66
Vale do Rio Doce	89,87	138,56
Zona da Mata	109,01	176,01

Fonte: FJP (2003); Elaborada pelo autor.

Em seguida, montou-se intervalos de classe com a amplitude dos intervalos (h) de tamanho igual à 0,16, gerando 7 classes. A Tabela 8 apresenta a matriz de Markov (transposta) da distribuição da renda per capita estimada para o teste entre as mesorregiões. É interessante observar que a matriz possui coeficiente igual a 1 para quase toda a diagonal principal, excetuando apenas em uma classe. A Tabela 9 apresenta a solução do sistema de equações de diferenças até 2 períodos a frente, assim como as distribuições inicial e ergótica.

**TABELA 8**  
**Matriz de Markov (transposta) da renda per capita em Minas Gerais por mesorregiões**

Classes	1	2	3	4	5	6	7
1	1	0	0	0	0	0	0
2	0	1	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	1	1	0	0	0
5	0	0	0	0	1	0	0
6	0	0	0	0	0	1	0
7	0	0	0	0	0	0	1
$\Sigma$	1	1	1	1	1	1	1

Fonte: Elaborada pelo autor.

**TABELA 9**  
**Resultado da convergência da renda per capita em Minas Gerais por mesorregiões**

Classes renda per capita			Solução da equação em diferenças para vários períodos			
Li	Ls		inicial	1	2	infinito
1	0,52	0,68	25,00%	25,00%	25,00%	25,00%
2	0,68	0,84	8,33%	8,33%	8,33%	8,33%
3	0,84	1,00	16,67%	0,00%	0,00%	0,00%
4	1,00	1,16	25,00%	41,67%	41,67%	41,67%
5	1,16	1,32	8,33%	8,33%	8,33%	8,33%
6	1,32	1,48	8,33%	8,33%	8,33%	8,33%
7	1,48	1,64	8,33%	8,33%	8,33%	8,33%

Obs.: Tempo necessário para alcançar metade do caminho em direção ao estado estacionário:  
 $\ln(2)/\ln(0)=0$

Fonte: Elaborada pelo autor

Ao analisar a tabela 9 percebe-se que este caso é uma situação muito particular, pois há uma convergência muito rápida, com um tempo estimado para atingir a metade do caminho até o estado estacionário próximo de zero. Assim, no período 1, a variável já converge para seus valores estacionários de longo prazo.

Mas ainda assim pode-se afirmar que é uma espécie de convergência em clubes, pois a mesorregião que apresentava uma renda *per capita* normalizada entre 0,84 e 1, teve seu valor aumentado para o intervalo 1 e 1,16, fazendo com que não haja mais nenhuma na classe 3. As demais, mantêm-se inalteradas. Provavelmente, deve-se ao fato destas terem características específicas de modo que não se pode falar em convergência absoluta, mas sempre em convergência relativa.

#### 4.2.2 O índice de Theil-L

A partir dos dados municipais e da equação de agregação para mesorregiões do Anexo A, foram construídas as medidas de Theil-L e proporção de pobres para 1991 e 2000, conforme apresentados na Tabela 10.

**TABELA 10**  
**Proporção de pobres e índice de Theil-L das mesorregiões de Minas Gerais**

Mesorregiões	Proporção de pobres		Theil-L	
	1991	2000	1991	2000
<b>Metropolitano BH</b>	0,3097	0,2298	0,44	0,44
<b>Zona da Mata</b>	0,4899	0,3026	0,45	0,46
<b>Vale do Rio Doce</b>	0,5524	0,4000	0,45	0,49
<b>Vale do Mucuri</b>	0,6811	0,5544	0,51	0,57
<b>Triângulo Mineiro</b>	0,2716	0,1795	0,47	0,52
<b>Sul/Sudoeste de Minas</b>	0,3619	0,2029	0,48	0,48
<b>Oeste</b>	0,3969	0,1976	0,47	0,46
<b>Norte</b>	0,6956	0,5819	0,45	0,48
<b>Noroeste</b>	0,5338	0,3749	0,54	0,64
<b>Jequitinhonha</b>	0,7353	0,6325	0,49	0,55
<b>Campo das Vertentes</b>	0,4766	0,3068	0,49	0,47
<b>Central Mineira</b>	0,4770	0,3112	0,50	0,51

Fonte: Elaborada pelo autor.

Contudo, no momento de montar a matriz de Markov, percebeu-se que o índice de Theil-L apresenta um comportamento semelhante ao teste do FGT(0) entre municípios. Utilizando valores para o “h” de forma que não dê divisão por 0 (zero), percebe-se que há uma tendência a aumentar a dispersão em torno da média da distribuição da variável de 1991 para 2000. Com isso, evidencia-se divergência do índice de Theil-L dentro de cada mesorregião. Significa que a distribuição de renda interna de cada uma tende a seguir um caminho diferente, de forma que no futuro elas tendem a ter uma disparidade ainda maior.

Neste caso, nem mesmo a renda *per capita* tende a demonstrar igualdade, de forma que cada mesorregião demonstra um caminho tanto na obtenção da renda gerada no estado, como na sua distribuição internamente.

#### 4.2.3 Proporção de pobres

Para os dados agregados por mesorregião para a proporção de pobres, estimou-se um intervalo de classe  $h=0,388$ , gerando 4 classes, de modo a respeitar o *trade-off* entre viés e variância e possibilitar a estimação da matriz de probabilidades de transição. Na tabela 11 apresentamos a matriz de Markov estimada.

**TABELA 11**  
**Matriz de Markov (transposta) do FGT(0) em Minas Gerais por mesorregiões**

Classes	1	2	3	4
1	1	0,333333	0	0
2	0	0,666667	0	0
3	0	0	0,666667	0
4	0	0	0,333333	1

Fonte: Elaborada pelo autor.

Ao analisar os resultados contidos na tabela 12, percebe-se que a convergência aqui é também rápida (apenas 15 anos até o nível de equilíbrio de longo prazo). O resultado é claro quanto à formação de clubes de convergência, indicando que à medida que os períodos vão passando as mesorregiões ou vão migrando para classes inferiores ou superiores, de modo que a classe com valor inferior tende a ser maior na dinâmica em análise. Na distribuição ergótica haverá 58,33% (ou seja, 7 das mesorregiões) com o menor valor da proporção de pobres. E dado que no período inicial, tal valor correspondia a apenas 1,88% (ou seja, uma das mesorregiões, aproximadamente), há uma melhora significativa em relação à proporção de pobres entre as mesorregiões do estado. Contudo, algumas mesorregiões tendem a piorar, migrando para classes piores, ou seja, a proporção de pobres em sua população tende a ser cada vez maior (isto acontece com as 5 demais mesorregiões). Tal resultado torna-se interessante à medida que a convergência mostra que, possivelmente, são as mesorregiões encontradas na região sul/sudeste tendem a melhorar sua proporção de pobres, e as norte/nordeste que tendem a ter sua proporção de pobres piorada. Isto se deve à observação de aumento da renda *per capita* na primeira e aumento na segunda, mas com piora na renda média dos pobres para esta última.

**TABELA 12**  
**Resultado da convergência do FGT(0) em Minas Gerais por mesorregiões**

Classes renda per capita			Solução da equação em diferenças para vários períodos									
	Li	Ls	Inicial	1	2	3	4	5	6	7	8	INFINITO
1	0,224	0,612	1,88%	24,98%	36,09%	43,50%	48,44%	51,73%	53,93%	55,40%	56,37%	58,33%
2	0,612	1	10,55%	35,35%	22,24%	14,84%	9,90%	6,60%	4,40%	2,94%	19,59%	0,00%
3	1	1,388	15,71%	16,67%	11,12%	7,42%	4,95%	3,30%	2,20%	1,47%	9,79%	0,00%
4	1,388	1,776	25,67%	24,99%	30,54%	34,24%	36,72%	38,37%	39,47%	40,20%	40,69%	41,67%

Tempo necessário para alcançar metade do caminho em direção ao estado estacionário:  $\ln(2)/\ln(\text{do maior autovalor, exceto o unitário}) = 15$  anos

Fonte: Elaborada pelo autor.

## 5. CONCLUSÕES

Muitos estudos têm buscado analisar as relações entre crescimento, desigualdade e pobreza, seja pela estimação de elasticidades crescimento e redistribuição da redução da pobreza, ou pela estimação dos determinantes do crescimento, incluindo entre eles o nível inicial da desigualdade e pobreza e/ou sua variação. Com relação ao crescimento, destacam-se os modelos de convergência de renda, no qual as regiões ou países tendem a crescer a taxas diferenciadas podendo ocorrer algum processo de *catching up*. Se a pobreza e a desigualdade são medidas baseadas na distribuição de renda, pode-se também supor que tais movimentos possam se reproduzir de alguma forma sobre estas medidas. Este trabalho buscou estimar a existência de processos de convergências para as medidas de desigualdade e pobreza, além da renda *per capita*, para os municípios e mesorregiões do estado de Minas Gerais, usando as informações censitárias de 1991 e 2000. Isto foi feito para verificar se havia alguma relação da convergência da renda com uma possível convergência de tais indicadores.

Para tanto, utilizou-se o método de Processos de Markov de primeira ordem para o caso discreto, que requer apenas as informações para dois períodos para construir as densidades das variáveis para cada período e uma matriz de probabilidade de transição. A partir desta matriz de Markov é possível projetar a densidade da variável para alguns períodos à frente, estimar a densidade ergótica e o tempo necessário para atingir a metade do caminho até o estado estacionário.

De acordo com os testes realizados, há uma rápida tendência à formação de clubes de convergência de renda *per capita* entre os municípios do estado de acordo com a amostra utilizada, considerando apenas a evolução observada na década de 1990. O tempo estimado para que a meia vida seja alcançada foi de apenas 36 anos. Quanto à distribuição da renda interna dentro de cada município – estimada pelo Theil-L –, não se espera que esta venha a se igualar, a não ser pela formação de pequenos clubes. Um resultado interessante em relação ao índice Theil-L refere-se ao fato da classe superior com os maiores índices passou a não ter nenhum município, assim como a penúltima classe na distribuição ergótica, indicando que os municípios que eram mais desiguais, tendem a melhorar sua distribuição interna de renda *per capita*. A meia vida é alcançada ainda mais rápida do que a renda *per capita*, em apenas 5 anos, mostrando que a distribuição de desigualdade interna dos municípios já está bem próxima do estado estacionário. Esse resultado, conjugado com o processo de convergência de renda *per capita*, reforça que as mudanças da densidade de médias de tal variável não estão afetando a densidade de desigualdade interna dos municípios, ou seja, convergência em renda significa em redução da desigualdade inter-municipal, mas pouco afeta a desigualdade intra-municipal.

Os determinantes da pobreza são, de um lado, a escassez de recursos, e de outro a má distribuição dos já existentes. Como houve formação de clubes de convergência de renda *per capita* e não necessariamente uma convergência na medida de desigualdade, pode-se afirmar que os resultados esperados para a proporção de pobres podem estar mais ligados à renda *per capita* (inter-municipal) do que com a melhora na distribuição da renda interna dos municípios (intra-municipal). Os resultados para a proporção de pobres mostram divergência dos dados normalizados pela média. Pode-se supor que esse resultado tem uma forte relação com o processo de convergência observado em renda *per capita*: aqueles municípios que tendem a convergir para níveis de renda *per capita* mais elevados, devem apresentar menor proporção de pobres relativamente à média; os que convergem para menores valores de renda *per capita* devem ter uma proporção maior de pobres em relação à média. Ou seja, convergência em clubes para a renda *per capita* implica em divergência da medida de pobreza entre os municípios.

Com relação aos testes feitos entre as mesorregiões, percebe-se uma rápida formação de clubes de convergência de renda *per capita*, divergência do índice de Theil-L e uma perfeita formação de clubes de convergência da proporção de pobres. E diferentemente do encontrado no teste feito para os municípios, a formação de clubes em pobreza (FGT(0)) deve-se não somente aos resultados encontrados para a renda, mas também aos do Theil-L. De um lado estão aquelas mesorregiões que tendem demonstrar melhora na renda *per capita* e melhora em sua distribuição de renda. As que apresentaram convergência de renda *per capita* para níveis inferiores e também divergido para altos níveis de desigualdade, tendem ser as mesmas mesorregiões que convergiram claramente para níveis mais elevados de proporção de pobres e vice-versa. Também pode ter ocorrido aquelas mesoregiões que convergiram para níveis de renda superiores e divergido para níveis de desigualdade baixos (ou o contrário), mas nesse caso, para saber se uma mesoregião específica convergiu para um certo nível de pobreza maior ou menor, depende saber qual, a renda *per capita* ou a desigualdade, foi mais elástica.

Com tais resultados, pode-se afirmar que os municípios e as mesorregiões que melhoraram sua renda *per capita* em relação aos demais, tenderam a convergir também para níveis de pobreza menores. Mas em relação à desigualdade entre as pessoas internamente, cada qual tende a seguir seu nível de estrutura de distribuição de renda, sendo pouco sensível à mudança da densidade de medidas de renda *per capita*. Ou seja, não há uma ligação direta entre a ocorrência de convergência de renda entre municípios (ou mesorregiões) e uma melhora na distribuição de desigualdade de renda interna dos mesmos (as). Mas ligação direta foi evidenciada quando ambas ocorreram na proporção de pobres.

Desta forma, se um dos objetivos da política pública é gerar um processo de convergência de pobreza, então deve-se conjugar políticas que visem reduzir a desigualdade entre os municípios e regiões, mas também intra-municípios e intra-regiões. Caso contrário continuar-se-á observando um processo de redução de pobreza com aumento da dispersão entre os municípios, revelando que a política pública tem alcançado piores resultados nos lugares que mais necessitam.

Por fim, baseado nos resultados de convergência, não há evidências para rejeitar a idéia contida na literatura, de que a pobreza é determinada pelo nível de renda e por sua distribuição.

## REFERÊNCIAS

- AHLUWALIA, M. (1976). Inequality, distribution and development. *American Economic Review*, 66 (5), 128-135, 1976.
- ATLAS DO DESENVOLVIMENTO HUMANO, 2003. IPEA/FJP/PNUD. Disponível em: [www.fjp.gov.br](http://www.fjp.gov.br)
- BANERJEE, A., DULFO, A. (2003). In equality and growth: what can the data say? *Journal of Economic Growth*, Vol. 8 pp.267-99, 2003.
- BARRETO, F.A., JORGE NETO, P.M., TEBALDI, E. (2001). Desigualdade de Renda e Crescimento Econômico no Nordeste Brasileiro. *Revista Econômica do Nordeste*, Fortaleza, v. 32, n. Especial p. 842-859, novembro 2001.
- BARRO, R.J., SALA-i-MARTIN, X. (1991). Convergence across states and regions. *Brookings Papers on Economic Activity*, p. 107-182, 1991.
- \_\_\_\_\_ (1992). Convergence. *Journal of Political Economy*, v. 100, p. 223-251, 1992.
- \_\_\_\_\_ (2003). *Economic Growth*. 2. ed. New York: McGraw Hill, 2003.
- BARROS, R.P., HENRIQUES, R., MENDONÇA, R. (2000). A estabilidade inaceitável: desigualdade e pobreza no Brasil. In: HENRIQUES, Ricardo (org.) **Desigualdade e pobreza no Brasil**. Rio de Janeiro: IPEA, 2000. Cap. 1, p. 23-47.
- BAUMOL, W.J. (1986). Productivity Growth, Convergence, and Welfare: What the Long-run Data Show. *American Economic Review*, vol. 76(5), pages 1072-85, December, 1986.
- BRUNO, M., RAVALLION, M., SQUIRE, L. (1998). Equity and growth in developing countries: Old and new perspectives on the policy issues. In: Tanzi and Ke-young Chu (eds), **Income Distribution and High-Quality Growth**, MIT Press, Cambridge, MA, 1998.
- BOLDRINI, José L.; COSTA, Sueli I. R.; FIGUEIREDO, Vera L.; WETZLER, Henry G. **Álgebra linear**. 3. ed. São Paulo: Harbra, 1980.
- DATT, G.; RAVALLION, M. (1992). **Growth and Redistribution Components of Changes in Poverty Measures: A Decomposition with Applications to Brazil and India in the 1980s**. *Journal of Development Economics*, P.38, 275-295, 1992.
- DE LONG, B. (1988). Productivity growth, convergence, and welfare: comment. *American Economic Review*, n.5, v.78, p. 1138-1154, dec. 1988.

- FERREIRA, F.H., LITCHFIELD, J.A. (2000). Desigualdade, pobreza e bem-estar social no Brasil – 1981/95. In: HENRIQUES, Ricardo (org.). **Desigualdade e pobreza no Brasil**. Rio de Janeiro: IPEA, 2000. Cap. 2, p. 49-78.
- FIELDS, G.S., (2001). **Distribution and Development: A New Look at the Developing World**. Russell Sage Foundation and the MIT Press, 2001.
- FIGUEIRÊDO, L., LEAL FILHO, R. S., AGUIAR, C. (2006). Matriz de probabilidades de transição por estimador de núcleo para as rendas relativas das microrregiões de Minas Gerais. In: **Anais do XII Seminário sobre a Economia Mineira**, Diamantina, 2006.
- GONDIM, J.L.B. (2006). **O uso do núcleo estocástico para identificação de clubes de convergência entre estados e municípios brasileiros**. PRÊMIO IPEA 40 ANOS, 2005. Disponível em <<http://www.ipea.gov.br/sobreIpea/40anos/vencedores40anos.htm>>. Acesso em: 10 mar. 2006.
- HOFFMANN, R. (2000). Mensuração da desigualdade e da pobreza no Brasil. In: HENRIQUES, Ricardo (org.). **Desigualdade e pobreza no Brasil**. Rio de Janeiro: IPEA, 2000. Cap.3, p.81-106, 2000.
- JUDGE, G., GRIFFITHS, W., HILL, R., LUTKEPOHL, H., LEE, T. (1998). **Introduction to the theory and Practice of Econometrics** (3rd ed.), New York: John Wiley & Sons, 1988.
- JONES, C. (2000). **Introdução à Teoria do Crescimento Econômico**. Stanford University: Campus, 2000.
- KUZNETS, S. (1955). Economic Growth and Income Inequality. *American Economic Review*, v.45, n.1.
- LAURINI, M., ANDRADE, E., PEREIRA, P.L.V. (2005). Income Convergence Clubs for Brazilian Municipalities: a Non-Parametric Analysis. **Applied Economics**, v. 37, n. 18, p. 2099-2118, 2005.
- MANSO, C.A., BARRETO, F.A., TEBALDI, E. (2006). O desequilíbrio regional brasileiro: novas perspectivas a partir das fontes de crescimento pró-pobre. **Revista Econômica do Nordeste**, v.31, n.º13, 2006.
- PERSSON, T., TABELINI, G. (1994). Is the quality harmful for growth. *The American Economic Review*, Vol. 84 No.3, pp.600-21.
- PRATES, F.M., WAJNMAN, S. (1996). **Desigualdade de renda e pobreza em Minas Gerais**. Belo Horizonte: UFMG-CEDEPLAR, 1996. 175fl. Dissertação (mestrado). Disponível em: <[http://webpergamum.adm-serv.ufmg.br/arquivos/215000/218900/93\\_218981.htm?codBib](http://webpergamum.adm-serv.ufmg.br/arquivos/215000/218900/93_218981.htm?codBib)>. Acesso em: 20 fev. 2006.
- QUAH, D. (1993a). Empirical cross-section dynamics in economic growth. *European Economic Review*. v. 37, p.426-434, 1993.
- QUAH, D. (1993b) Galton's fallacy and test of the convergence hypothesis. *The Scandinavian journal of Economics*. v.95, p.427-443, 1993.
- RAVALLION, M., CHEN, S. (1997). What can new survey data tell us about recent changes in poverty and distribution? *World Bank Economic Review*, 11(2):357-382, 1997.
- RAVALLION, M.. (1994). **Poverty Comparisons**. Switzerland: Harwood Academic Publishers, Chur, 1994.
- \_\_\_\_\_ (1995). **Growth and Poverty: Evidence for Developing Countries in the 1980s**. *Economics Letters*, P. 48, 411-417, 1995.
- \_\_\_\_\_ (1997). **Can High Inequality Developing Countries Escape Absolute Poverty?**. *Economics Letters*, P.56, 51-57, 1997.
- \_\_\_\_\_ (2005). **Pro-Poor Growth: A Primer**. World Bank Policy Research Working Paper No. 3242. Development Research Group, World Bank, 2005.
- RESENDE, G.M. (2006). **O crescimento econômico dos municípios mineiros têm sido pró-pobre?** Seminário de Economia Mineira, Diamantina 2006.

- RIBEIRO, E. P., PORTO JÚNIOR, S.S. (2006). **Dinâmica espacial da renda per capita e crescimento entre os municípios da região nordeste do Brasil: uma análise markoviana.** Disponível em: <<http://www.anpec.org.br/encontro2003/artigos/E54.pdf>> Acesso em: 10 fev. 2006.
- ROCHA, S. (2000). Estimação de linhas de indigência e de pobreza: opções metodológicas no Brasil. In: HENRIQUES, Ricardo (org.). **Desigualdade e pobreza no Brasil.** Rio de Janeiro: IPEA, 2000. Cap.4, p. 109-134.
- ROBINSON, S. (1976). A note on the U-Hypothesis relating income inequality and economic development. *American Economic Review*, 66(3), 437-400, 1976.
- ROMERO, Julio A.J.R. **Análise espacial da pobreza municipal no estado de Minas Gerais 1991-2000.** Minas Gerais: CEDEPLAR/UFMG, 2006. Tese (doutorado). Universidade Federal de Minas Gerais. 2006.
- SALVATO, M.A., RAAD, R.J., ARAUJO JR., A.F., PESSOA, F.M. (2006). Disparidades Regionais em Minas Gerais. In: Anais do XII Seminário sobre Economia Mineira, Diamantina, 2006.
- SALVATO, M.A., ARAUJO JR., A.F., MESQUITA, L.A. (2007a). Crescimento pró-pobre no Brasil: uma avaliação empírica da década de 1990. Ibmecc MG Working Paper, WP43, 2007.
- SALVATO, M.A., ALVARENGA, P.S., FRANÇA, C.S., ARAUJO JR., A.F. (2007b). Crescimento e Desigualdade: evidências da Curva de Kuznets para os municípios de Minas Gerais - 1991/2000. **Economia e Gestão** (forthcoming 2007)
- SILVA, Elydia; FONTES, Rosa; ALVES, Luis F. (2005). Crescimento e desigualdade em Minas Gerais. In: FONTES, Rosa; FONTES, Maurício. **Crescimento e desigualdade regional em Minas Gerais.** Viçosa: Minas Gerais, 2005.
- SIMON, C.P., BLUME, L. (1994). **Matemática para economistas.** Porto Alegre: Bookman, 1994.
- SOLOW, R.M. (1956). A contribution to the theory of economic growth. *Quarterly Journal of Economics*. v.70, p.65-94, 1956.
- SOUZA, Nali de Jesus. **Desenvolvimento econômico.** 4. ed. São Paulo: Atlas, 1999.
- STÜLP, V.J., FOCHEZATTO, A. (2004). A evolução das disparidades regionais no Rio Grande do Sul: uma aplicação de matrizes de Markov. **Nova Economia**, Belo Horizonte, v.14, n.1, p. 39-66, jan./abr.2004.

## APÊNDICE A– CÁLCULO DOS ÍNDICES DE THEIL-L E FGT(0) PARA MESORREGIÕES

### A.1. Índice de Theil-L

Ao optar por testar a convergência não somente da renda, mas também dos índices de Theil-L e FGT(0) entre as mesoregiões, foi necessário construir essas medidas a partir dos dados agregados por municípios, aproveitando a mesma base de dados do Atlas do Desenvolvimento Humano da FJP-MG, considerando procedimento descrito a seguir. Considere a função do índice de Theil-L definida na seção 2,

$$EG = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln \left( \frac{y_i}{y^*} \right) \quad (1.a)$$

em que  $y_i$  é a renda do  $i$ -ésimo indivíduo,  $Y^*$  é a renda média *per capita*,  $n$  é o número de pessoas na região específica. Ou ainda,  $EG = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln(y_i) - \ln(y^*)$ .

Para obter o índice de Theil-L para a mesoregião, é necessário conhecer o seu número

de habitantes da mesorregião ( $n_m$ ), o somatório do  $\ln$  da renda de todos os indivíduos da mesorregião ( $W_m$ ) e sua renda média *per capita* ( $y_m^*$ ). Para tanto, usamos a equação (2.a) para achar  $W_m$ , a partir dos dados municipais de EG e renda média *per capita*. Somando todos  $W_j$ , com  $j=1, \dots, k$ , onde  $k$  é o número de municípios da mesorregião  $m$  e  $j$  é  $j$ -ésimo município que pertence à mesorregião  $m$ , obtêm-se o  $W_m$ . Tal descrição pode ser visualizada a partir da equação (2.a) e chegando à equação (3.a).

$$\sum_{i=1}^n \ln(y_i) = [EG + \ln(y^*)]n \quad (2.a)$$

$$W_j = [EG_j + \ln(y^*)_j]n_j$$

$$W_m = \sum_{j=1}^k W_j \quad (3.a)$$

A outra variável a se obter é a quantidade de pessoas na mesorregião, que é obtida somando-se a quantidade de pessoas que estão contidas em cada município  $j$  dentre os  $k$  municípios,  $n_m = \sum_{j=1}^k n_j$ , sendo  $k$  o número de municípios na mesorregião  $m$  e  $n_j$  é a quantidade de habitantes no município  $j$  desta mesorregião.

A renda média *per capita* da mesorregião  $m$  é obtida pela média ponderada das rendas médias *per capita* de cada município  $j$  que pertence à mesorregião  $m$ , considerando  $n_j/n_m$  como ponderador.

$$y_m^* = \sum_{j=1}^k \frac{n_j}{n_m} y_j^* \quad (4.a)$$

Pode-se então calcular o índice de Theil-L da mesoregião  $m$  a partir de,

$$EG_m = \frac{W_m}{n_m} - \ln(y_m^*) \quad (5.a)$$

$$EG_m = \frac{\sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^n \ln(y_{ij})}{\sum_{j=1}^k n_j} - \ln \left( \frac{\sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^n y_{ij}}{\sum_{j=1}^k n_j} \right) \quad (6.a)$$

## A.2. Proporção de pobres para as mesorregiões

Utilizando de algumas equações obtidas na determinação do índice de Theil-L, a proporção de pobres nas mesorregiões podem ser obtidas na equação (7.a).

$$FGT(0)_m = \frac{\sum_{j=1}^k [(n_j)FGT(0)_j]}{n_m} \quad (7.a)$$

em que  $FGT(0)_j$  é a proporção de pobres no município  $j$ ,  $n_j$  é a quantidade de pessoas no município  $j$ ,  $n_m$  é a quantidade de pessoas na mesorregião. No numerador temos a soma da quantidade de pessoas pobres da mesorregião obtida da soma de pobres em cada município que nela continha. Já o denominador da equação, tem-se a quantidade total de pessoas na mesorregião. Assim, por definição obtêm-se a proporção de pobres na mesorregião como a razão entre a quantidade de pobres e a população total.

## APÊNDICE B – PROBABILIDADE E PROCESSO DE MARKOV

Suponha um conjunto de variáveis aleatórias discretas, ou seja, uma para cada período. Essa variável relaciona um evento ao acaso, ao valor médio estadual (denotando esta variável como  $X_t$ ). Suponha que esse conjunto de valores seja finito. Definem-se então as probabilidades de transição como se segue:

**Definição B.1:** considere  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{N}} : \Omega \rightarrow R$  uma seqüência enumerável de variáveis aleatórias (ou seja, um processo estocástico) definidas em um mesmo espaço amostral  $\Omega$  que possuem imagem discreta  $\{x_1, \dots, x_n\} \subset R$ . Dizemos que  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{N}}$  é um Processo Estocástico de Markov (PEM) quando temos a seguinte relação:

$$P(X_{t+1} = x_j \mid X_t = x_i, \dots, X_0 = x_0) = P(X_{t+1} = x_j \mid X_t = x_i) = p_{ij} \quad \forall t, i, j$$

$$P((X_{t+1} \in A_j) \cap \Omega) = P(X_{t+1} \in A_j) = [F_{t+1}]_j$$

Dessa relação, chega-se à relação de Markov:

$$F_{t+1} = F_t M \text{ ou em outro modo: } F^T_{t+1} = M^T F^T_t$$

em que T representa a transposta das matrizes e dos vetores,  $M^T$  é a matriz de Markov transposta.

No caso a análise dos dados é baseada em uma amostra e as probabilidades condicionais são estimativas de máxima verossimilhança da probabilidade original, definido como segue abaixo. Considere a função indicadora:  $I_A(x)$  como sendo 1 se  $x \in A$  e 0 caso contrário. Então, o estimador é definido como:

$$\hat{P} = \frac{\sum_{i=1}^n I_{A_j}(X_{t+1}, i) I_{A_k}(X_{t_i})}{\sum_{i=1}^n I_{A_j}(X_{t_i})}$$

Em que:  $X_{t1}, \dots, X_{tn}$  é uma amostra aleatória de  $X_t$  e  $X_{t+1,1}, \dots, X_{t+1,n}$  é uma amostra aleatória de  $X_{t+1}$  observe que  $\hat{P}$  é uma variável aleatória (um estimador) e que o numerador da expressão acima conta quantas vezes os elementos da amostra de  $X_{t+1}$  caem em  $A_j$  e os elementos da amostra de  $X_t$  caem em  $A_k$  ao mesmo tempo. Além disso, o denominador calcula o número total de elementos que temos da amostra de  $X_t$  caindo dentro de  $A_k$ . Esta relação claramente estima a probabilidade pelo método da máxima verossimilhança. Ou seja, as probabilidades de transição independem do tempo em todas as informações passadas. Quando isto acontece, diz-se que a distribuição não possui memória.

$$P(X_{t+1} \in A_t \mid X_t \in A_k) = \frac{P[(X_{t+1} \in A_t) \cap (X_t \in A_k)]}{P(X_t \in A_k)}$$