

# FINANCIAL ECONOMETRICS

*Prof. Márcio Antônio Salvato*

## Introdução

- Tsay, Ruey S. Analysis of Financial Time Series: Financial Econometrics. John Willey & Sons, Inc., 2005, Second Edition, chapter 1.

<http://faculty.chicagogsb.edu/ruey.tsay/teaching/fts2/>

Em princípio, não há diferença entre séries temporais financeiras e macroeconômicas. Contudo, dados financeiros frequentemente diferem em termos de sua frequência, exatidão, sazonalidade e outras propriedades.

Em economia normalmente temos alguns problemas que não são tão relevantes em finanças:

- Problema de pequenas amostras: *ausência de dados* para testar diretamente uma teoria ou hipótese relevante.
- Erro de medida: dificuldade de estimação ou medida de variáveis.
- *Data revision*: dados são frequentemente corrigidos na publicação mais recente.

É claro que dados financeiros estão sujeitos a métodos de medidas diferenciados para determinado índice, mas em geral erros de medida e problemas de revisão de dados não são problemas sérios em finanças.

Uma característica presente em ativos financeiros é o que se convencionou chamar de volatilidade, que pode ser definida de várias maneiras, mas não é diretamente observável. Daí a necessidade de modelos heterocedásticos condicionais para modelar a presença de grupos de volatilidade. Assim, a variância (volatilidade) depende de informações passadas disponíveis até aquele instante, de modo que temos que definir uma *variância*

*condicional*, que varia com o tempo e, portanto, não coincide com a *variância incondicional* de toda a série.

Além disso, dados financeiros são observados em mais alta frequência que dados macroeconômicos (*high frequency*). Geralmente, observamos preços de ativos e retorno diariamente, por hora, ou até por minuto. Isso torna o tamanho da amostra potencialmente grande.

Mas séries financeiras possuem outros problemas:

- *Noisy*: dificuldade de separar sua tendência do termo aleatório e outras características.
- *No normality*: quase sempre a propriedade de normalidade não é atendida.
- *Additional patterns*: dados de alta frequência contêm padrões que são resultado de como o mercado opera ou como os preços são gravados.

## Propriedade dos Ativos Financeiros

A maioria dos estudos em finanças usa o retorno de um ativo ao invés do preço. Duas razões:

- O retorno é uma medida completa e livre de escala da oportunidade de investimento.
- As propriedades estatísticas do retorno de um ativo são mais tratáveis que as propriedades do preço do ativo.

### Retorno de 1 período

Seja  $P_t$  o preço de um ativo no período  $t$ . Primeiramente, assuma que os ativos não pagam dividendos. Assim,  $P_t = P_{t-1}(1 + R_t)$

O retorno líquido simples é:  $R_t = \frac{P_t}{P_{t-1}} - 1 = \frac{\Delta P_t}{P_{t-1}} = \% \Delta P_t$

$1 + R_t = \frac{P_t}{P_{t-1}}$  é o retorno simples bruto.

## Retorno Simples multiperíodo

Considere um ativo para  $k$  períodos, com retornos entre  $t-k$  e  $t$ . Assim,

$$\begin{aligned} 1 + R_t[k] &= \frac{P_t}{P_{t-k}} = \frac{P_t}{P_{t-1}} \times \frac{P_{t-1}}{P_{t-2}} \times \dots \times \frac{P_{t-k+1}}{P_{t-k}} = (1 + R_t)(1 + R_{t-1}) \dots (1 + R_{t-k+1}) \\ &= \prod_{j=0}^{k-1} (1 + R_{t-j}) \end{aligned}$$

É chamado de retorno composto (*compound return*)

Retorno para um período a partir de um retorno composto = média geométrica:

$$(1 + R_A)^k = 1 + R_t[k]$$

$$R_A = \left[ \prod_{j=0}^{k-1} (1 + R_{t-j}) \right]^{\frac{1}{k}} - 1 = \exp \left[ \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} \ln(1 + R_{t-j}) \right] - 1 \approx \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} R_{t-j}$$

Essa última aproximação é utilizar a média aritmética ao invés da média geométrica a partir de uma expansão de Taylor de primeira ordem em torno de zero do retorno (k) anualizado. Esta aproximação é boa para retornos pequenos. Quanto maiores forem os retornos, maior é o erro de aproximação usando a média aritmética ao invés da geométrica.

Ajustando para o pagamento de Dividendos (retorno total):

$$R_t = \frac{P_t + D_t}{P_{t-1}} - 1 = \frac{\Delta P_t}{P_{t-1}} + \frac{D_t}{P_{t-1}}$$

Ajustando para a inflação (retorno real):

$$1 + R_t^{real} = \frac{P_t}{P_{t-1}} \frac{CPI_{t-1}}{CPI_t}$$

em que  $CPI$  é um índice de preços.

Para um portfólio:

O retorno simples líquido de uma carteira com  $N$  ativos é a média ponderada dos retornos líquidos simples desses ativos, em que o peso é o percentual de cada ativo na carteira.

Assim, o retorno de uma carteira  $p$  no período  $t$  é:  $R_{p,t} = \sum_{i=1}^N x_i R_{it}$ , em que  $R_{it}$  é o retorno simples de um ativo  $i$  e  $x_i$  o peso na carteira.

Excesso de retorno:

Excesso de retorno de um ativo é a diferença entre o retorno do ativo e o retorno de algum ativo de referência, normalmente um ativo *riskless* (como um U.S. Treasury Bill de curto prazo).

$$Z_t = R_t - R_t^f$$

$$R_t^f = \text{T-bill rate}$$

## **Retorno composto contínuo**

Vamos agora considerar tempo contínuo. Para ilustrar a diferença, considere o exemplo:

Suponha uma aplicação de \$1,00 que rende juros à taxa de 10% a.a. Se o banco lhe pagar juros 1 vez por ano, então temos, depois de um ano,  $\$1(1+0,1)=\$1,10$ . Se lhe pagar juros semestralmente, então temos, depois de um ano,  $\$1(1+0,1/2)^2=\$1,1025$ . Com 12 pagamentos mensais teríamos  $\$1(1+0,1/12)^{12}=\$1,10471$ . Com 365 pagamentos diários teríamos  $\$1(1+0,1/365)^{365}=\$1,10516$ . Com  $m$  pagamentos, teríamos  $\$1(1+0,1/m)^m$ . E assim sucessivamente. Se  $m \rightarrow \infty$ , então temos um tempo contínuo.

Mas sabemos o limite fundamental:  $\lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m = e$ . Portanto, temos ao final de um ano  $\$1e^{0,1} = 1,10517$ .

De forma geral, em tempo contínuo, o preço de um ativo composto contínuo,  $A$ , a partir de um valor inicial,  $C$ , depois de  $n$  períodos para uma taxa de juros  $r$  ao período é:  $A = C \exp(r \times n)$

Tomando logaritmo natural da expressão para tempo contínuo pode-se ver que o retorno composto continuamente de um ativo,  $r_t$ , pode ser escrito como o logaritmo natural do retorno bruto simples (é chamado de log retorno):

$$r_t = \ln(1 + R_t) = \ln\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right) = p_t - p_{t-1}, \text{ em que } p_t = \ln P_t$$

$$\therefore \exp(r_t) = 1 + R_t = \frac{P_t}{P_{t-1}} \Rightarrow P_t = P_{t-1} \exp(r_t)$$

E portanto, multiperíodo:

$$\begin{aligned} r_t[k] &= \ln(1 + R_t[k]) = \ln((1 + R_t)(1 + R_{t-1}) \cdots (1 + R_{t-k+1})) \\ &= \ln(1 + R_t) + \ln(1 + R_{t-1}) + \cdots + \ln(1 + R_{t-k+1}) \\ &= r_t + r_{t-1} + \cdots + r_{t-k+1} \\ &= \sum_{j=0}^{k-1} r_{t-j} \end{aligned}$$

Ou seja, o retorno multiperíodo composto continuamente é a soma dos retornos um período composto continuamente.

Retorno composto anualizado:

$$r_A = \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} r_{t-j}, \text{ é a média aritmética.}$$

Ajustando para o pagamento de Dividendos (retorno total):

$$r_t = \ln(1 + R_t) = \ln\left(\frac{P_t + D_t}{P_{t-1}}\right) = \ln(P_t + D_t) - \ln(P_{t-1})$$

Ajustando para a inflação (retorno real):

$$r_t^{real} = \ln(1 + R_t^{real}) = \ln\left(\frac{P_t}{P_{t-1}} \frac{CPI_{t-1}}{CPI_t}\right) = r_t - \pi_t$$

em que  $CPI$  é um índice de preços.

Para um portfólio:

$$r_{p,t} = \ln(1 + R_{p,t}) = \ln\left(1 + \sum_{i=1}^N x_i R_{it}\right) \neq \sum_{i=1}^N x_i r_{it} .$$

mas  $r_{p,t} \approx \sum_{i=1}^N x_i r_{it}$  se  $R_{it}$  é pequeno.

Excesso de retorno:

$$z_t = r_t - r_t^f$$

em que  $r_t^f = \ln(1 + R_t^f)$

## Propriedades Estatísticas

Considere uma coleção de  $N$  ativos e  $T$  períodos de tempo ( $t = 1, 2, \dots, T$ ).  
Então temos:

Log return:  $\{r_{it}; i = 1, \dots, N; t = 1, \dots, T\}$

Simple return:  $\{R_{it}; i = 1, \dots, N; t = 1, \dots, T\}$

Excess return:  $\{Z_{it}; i = 1, \dots, N; t = 1, \dots, T\}$

Log excess return:  $\{z_{it}; i = 1, \dots, N; t = 1, \dots, T\}$

**Revisão estatística:**

*Distribuição conjunta de probabilidade:*

$$F_{X,Y}(x, y; \theta) = P(X \leq x, Y \leq y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f_{x,y}(w, z; \theta) dw dz$$

em que  $X$  e  $Y$  são variáveis aleatórias contínuas,  $\theta$  é o vetor de parâmetros que definem a distribuição e  $f_{x,y}$  é a função de densidade conjunta.

*Distribuição marginal de probabilidade:*

$$F_X(x; \theta) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^{\infty} f_{x,y}(w, z; \theta) dw dz = \int_{-\infty}^x f_x(w; \theta) dw$$

*Densidades marginais:*

$$f_x(x; \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{x,y}(x, y; \theta) dy \quad \text{e} \quad f_y(y; \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{x,y}(x, y; \theta) dx$$

*Distribuição condicional:*

$$F_{X|Y \leq y}(x; \theta) = \frac{P(X \leq x, Y \leq y)}{P(Y \leq y)}$$

*Densidade condicional:*

$$f_{x|y}(x; \theta) = \frac{f_{x,y}(x, y; \theta)}{f_y(y; \theta)}$$

Assim,  $f_{x,y}(x, y; \theta) = f_{x|y}(x; \theta) \times f_y(y; \theta) = f_{y|x}(y; \theta) \times f_x(x; \theta)$

$X$  e  $Y$  independentes, se e somente se  $f_{x|y}(x; \theta) = f_x(x; \theta)$ .

Então,  $X$  e  $Y$  independentes, se e somente se  $f_{x,y}(x, y; \theta) = f_x(x; \theta) \times f_y(y; \theta)$ .

*Momento de ordem  $l$ :*

$$m'_l = E(X^l) = \int_{-\infty}^{\infty} x^l f(x) dx$$

Logo, a média é simplesmente o momento de ordem 1 ( $\mu_x$ ).

*Momento centrado na média de ordem  $l$ :*

$$m_l = E[(X - \mu_x)^l] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_x)^l f(x) dx$$

A variância é o momento centrado na média de ordem 2 ( $\sigma_x^2$ ).

$$\sigma_x^2 = E[(X - \mu_x)^2] = E(X^2) - [E(X)]^2$$

Desvio-padrão =  $\sigma_x = \sqrt{\sigma_x^2}$  é a medida de dispersão.

Obs.:

1) Os dois primeiros momentos definem completamente uma distribuição normal.  $X \sim N(\mu_x, \sigma_x^2)$ . Outras distribuições precisam de momentos de ordem superior.

2) O momento central de ordem 3 mede a assimetria.

3) O momento central de ordem 4 mede a curtose (peso da calda).

*Skewness*: (momento central de ordem 3 normalizado)

$$S(x) = E\left[\frac{(X - \mu_x)^3}{\sigma_x^3}\right]$$

*Kurtosis*: (momento central de ordem 4 normalizado)

$$K(x) = E\left[\frac{(X - \mu_x)^4}{\sigma_x^4}\right]$$

Obs.:

1) Excesso de curtose =  $K(x) - 3$ .

2) Excesso de curtose de uma distribuição normal é zero.

3) Excesso de curtose  $> 0$ , diz-se que a distribuição tem cauda pesada; tem mais massa na cauda em comparação com uma distribuição normal; tende a ter mais valores extremos.

Para uma amostra, os estimadores são:

$$\text{Média amostral: } \hat{\mu}_x = \bar{X} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T x_t$$

$$\text{Variância amostral: } \hat{\sigma}_x^2 = \frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^T (x_t - \hat{\mu}_x)^2$$

$$\text{Assimetria amostral: } \hat{S}(x) = \frac{1}{(T-1)\hat{\sigma}_x^3} \sum_{t=1}^T (x_t - \hat{\mu}_x)^3$$

Curtose amostral:  $\hat{K}(x) = \frac{1}{(T-1)\hat{\sigma}_x^4} \sum_{t=1}^T (x_t - \hat{\mu}_x)^4$

Sob normalidade,  $\hat{S}(x)$  e  $\hat{K}(x) - 3$  são assintoticamente normalmente distribuídas com média zero e variâncias  $6/T$  e  $24/T$ , respectivamente [Snedecor (1980)]. Assim temos os testes de hipóteses:

1)  $H_0: S(x) = 0$ ,  $H_1: S(x) \neq 0$

$t = \hat{S}(x) / \sqrt{6T}$ , e usa distribuição assint. normal padrão

2)  $H_0: K(x) - 3 = 0$ ,  $H_1: K(x) - 3 \neq 0$

$t = (\hat{K}(x) - 3) / \sqrt{24T}$ , e usa distribuição assint. normal padrão

3) Teste Jarque-Bera [Jarque and Bera (1987)]

$$JB = \frac{\hat{S}^2(x)}{6/T} + \frac{(\hat{K}(x) - 3)^2}{24/T} \sim \chi^2(2)$$

### Distribuição de Retornos:

Considere o modelo para Log return:  $\{r_{it}; i = 1, \dots, N; t = 1, \dots, T\}$

Distribuição conjunta:  $F_r(r_{11}, \dots, r_{N1}; r_{12}, \dots, r_{N2}; \dots; r_{1T}, \dots, r_{NT}; Y, \theta)$ , em que  $Y$  é um vetor de variáveis que sumarizam o ambiente em que os retornos dos ativos são determinados e  $\theta$  é o vetor de parâmetros que determina a distribuição  $F_r(\cdot)$ .

Um trabalho empírico consiste em estimar o vetor de parâmetros desconhecido,  $\theta$ , para fazer uma inferência estatística sobre  $\{r_{it}\}$ , dado o seu passado.

CAPM (capital asset pricing model) de Sharpe (1964): foca o estudo sobre a distribuição de  $N$  ativos para um único período  $t$ ,  $\{r_{1t}, \dots, r_{Nt}\}$ , aplicando modelos estáticos.

Outros estudos focam na estrutura dinâmica de um ativo individual,  $\{r_{i1}, \dots, r_{iT}\}$ , aplicando modelos de séries temporais.

## **Distribuições de probabilidade usadas em finanças:**

### 1) Distribuição Normal:

A mais tradicional hipótese é que os retornos simples,  $\{R_{it} | t=1, \dots, T\}$  são independente, identicamente e normalmente distribuídos,  $R_i \sim iidN(\mu, \sigma^2)$ . Isto torna o problema mais tratável. Mas, gera outros problemas:

- i) o limite inferior de um retorno simples é -1 (quando o  $P_t \rightarrow 0$ ), mas a distribuição normal não tem limite inferior ( $-\infty$ ).
- ii) mesmo assumindo  $R_i$  normalmente distribuído,  $R_{it}[k]$  não será normalmente distribuído pois é o produto de retornos de um período.
- iii) a hipótese de normalidade não se sustenta em muitos estudos empíricos, pois a distribuição dos retornos tende a ter excesso de curtose (cauda pesada).

### 2) Distribuição Lognormal:

Assume-se que *log return*,  $r_t$  é independente e identicamente distribuídos (iid) como uma normal com média  $\mu$  e variância  $\sigma^2$ . Assim, os retornos simples são iid lognormal com média e variância definidas por:

$$E(R_t) = \exp\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right) - 1, \quad Var(R_t) = \exp(2\mu + \sigma^2)[\exp(\sigma^2) - 1]$$

Neste caso, como a soma de variáveis aleatórias iid normal é também normal, temos que  $r_t[k]$  é também normalmente distribuído, sob a hipótese de normalidade para  $\{r_t\}$ . Além disso, não há limite inferior para  $r_t$  e o limite inferior para  $R_t$  é satisfeito usando  $1+R_t = \exp(r_t)$ .

Alternativamente, podemos dizer que o retorno simples,  $R_t$ , é lognormalmente distribuídos com média e variância  $m_1$  e  $m_2$ , respectivamente. Assim, a média e variância do log retorno  $r_t$  são:

$$E(r_t) = \ln\left(\frac{m_1 + 1}{\sqrt{1 + m_2/(1 + m_1)^2}}\right), \quad \text{Var}(r_t) = \ln\left(1 + \frac{m_2}{(1 + m_1)^2}\right)$$

Por outro lado, estudos empíricos ainda mostram que a lognormal não é consistente com todas as propriedades observáveis da distribuição empírica, em particular, o excesso de curtose.

### 3) Misturas de distribuições normais:

Por causa do problema de excesso de curtose é comum usar uma mistura de distribuições normais para o log retorno,  $r_t$ .

$$r_t \sim (1 - \alpha)N(\mu, \sigma_1^2) + \alpha N(\mu, \sigma_2^2), \quad 0 \leq \alpha \leq 1, \quad \sigma_1^2 < \sigma_2^2$$

Quanto maior  $\sigma_2^2$ , maior a massa da cauda da distribuição resultante. Além disso, mantemos as propriedades tratáveis de distribuição normal, com momentos finitos, capturando o excesso de curtose.

Problema: dificuldade de estimar o parâmetro da mistura,  $\alpha$ .

### **Distribuição multivariada de Retornos:**

Seja  $r_t = (r_{1t}, \dots, r_{Nt})'$  um vetor de log retornos para  $N$  ativos no período  $t$ . Queremos tratar a distribuição conjunta de  $\{r_t\}_{t=1}^T$ , mas que pode ser particionada pelo produto das distribuições condicionais:

$$\begin{aligned} F(r_1, \dots, r_T; \theta) &= F(r_1)F(r_2 | r_1) \cdots F(r_T | r_{T-1}, \dots, r_1) \\ &= F(r_1) \prod_{t=2}^T F(r_t | r_{t-1}, \dots, r_1) \end{aligned}$$

Neste caso, temos um vetor de médias e uma matriz de variância-covariância dos retornos:

$$\begin{aligned} E(r) &= \mu_r = [E(r_1), \dots, E(r_N)]' \\ \text{Cov}(r) &= \Sigma_r = E[(r - \mu_r)(r - \mu_r)'] \end{aligned}$$

Dado uma amostra com  $T$  informações para os  $N$  ativos, a média e covariância amostral são definidas por:

$$\hat{\mu}_r = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T r_t, \quad \hat{\Sigma}_r = \frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^T (r_t - \hat{\mu}_r)(r_t - \hat{\mu}_r)'$$

que produzem estimativas consistentes dos parâmetros.

## Função de verossimilhança dos retornos

Temos,

$$\begin{aligned} f(r_1, \dots, r_T; \theta) &= f(r_1; \theta) f(r_2 | r_1; \theta) \cdots f(r_T | r_{T-1}, \dots, r_1; \theta) \\ &= f(r_1; \theta) \prod_{t=2}^T f(r_t | r_{t-1}, \dots, r_1; \theta) \end{aligned}$$

Se  $f(\cdot)$  é normal com média  $\mu_t$  e variância  $\sigma_t^2$ , então temos,

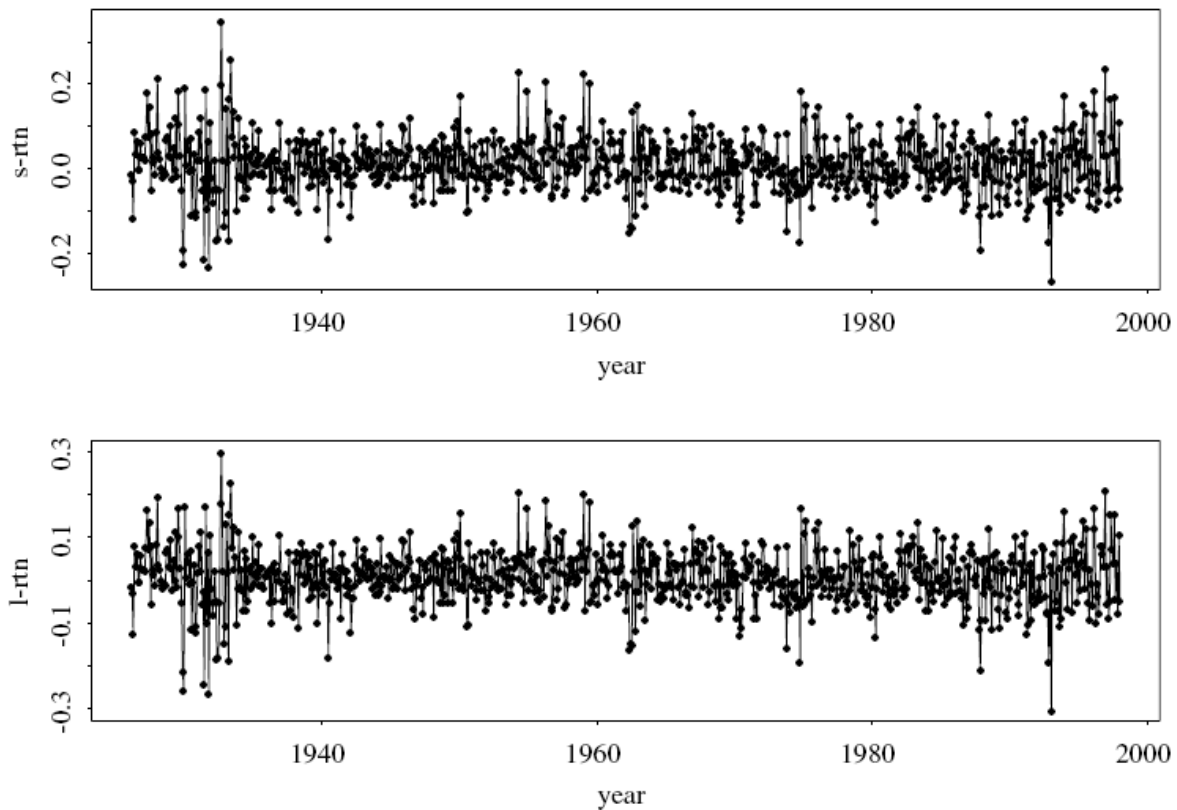
$$f(r_1, \dots, r_T; \theta) = f(r_1; \theta) \prod_{t=2}^T \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_t} \exp\left(-\frac{(r_t - \mu_t)^2}{2\sigma_t^2}\right)$$

E a log-verossimilhança,

$$\ln f(r_1, \dots, r_T; \theta) = \ln f(r_1; \theta) - \frac{1}{2} \sum_{t=2}^T \left( \ln(2\pi) + \ln(\sigma_t^2) + \frac{(r_t - \mu_t)^2}{2\sigma_t^2} \right)$$

## Propriedades empíricas dos retornos

Exemplo: International Business Machines (IBM) stock, jan-1926 a dez-1997, retornos mensais (simples e log retornos).



**Figure 1.2.** Time plots of monthly returns of IBM stock from January 1926 to December 1997. The upper panel is for simple net returns, and the lower panel is for log returns.

Fonte: Tsay (2002, p.15)

- Como esperado, o padrão de comportamento de  $R_{it}$  e  $r_{it}$  é similar.
- Variabilidade do retorno não é constante no tempo e aparece em *clusters*.

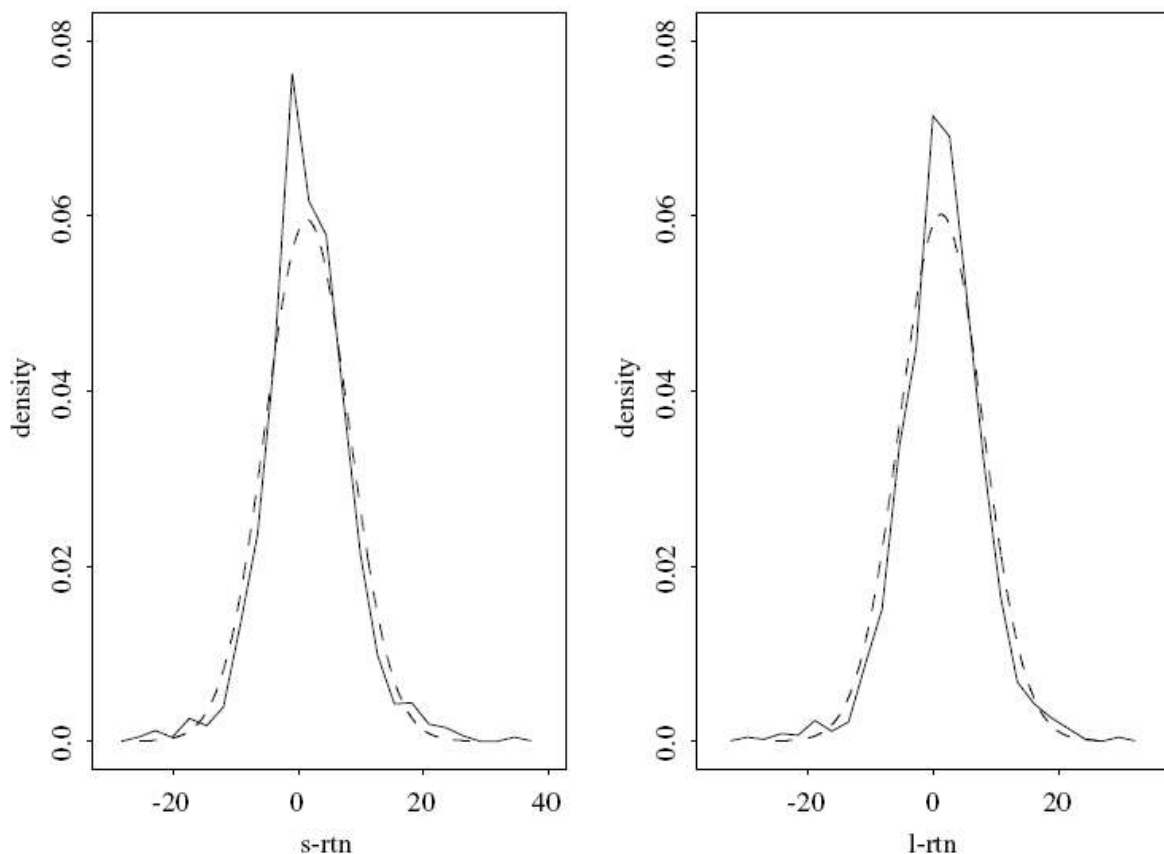
**Table 1.2. Descriptive Statistics for Daily and Monthly Simple and Log Returns of Selected Indexes and Stocks. Returns Are in Percentages, and the Sample Period Ends on December 31, 1997. The Statistics Are Defined in Equations (1.10) to (1.13), and VW and EW Denote Value-Weighted and Equal-Weighted Indexes.**

Security	Start	Size	Mean	Stan. Dev.	Skew.	Excess Kurt.	Min.	Max.
(a) Daily simple returns (%)								
VW	62/7/3	8938	0.049	0.798	-1.23	30.06	-17.18	8.67
EW	62/7/3	8938	0.083	0.674	-1.09	18.09	-10.48	6.95
I.B.M.	62/7/3	8938	0.050	1.479	0.01	11.34	-22.96	12.94
Intel	72/12/15	6329	0.138	2.880	-0.17	6.76	-29.57	26.38
3M	62/7/3	8938	0.051	1.395	-0.55	16.92	-25.98	11.54
Microsoft	86/3/14	2985	0.201	2.422	-0.47	12.08	-30.13	17.97
Citi-Grp	86/10/30	2825	0.125	2.124	-0.06	9.16	-21.74	20.75
(b) Daily log returns (%)								
VW	62/7/3	8938	0.046	0.803	-1.66	40.06	-18.84	8.31
EW	62/7/3	8938	0.080	0.676	-1.29	19.98	-11.08	6.72
I.B.M.	62/7/3	8938	0.039	1.481	-0.33	15.21	-26.09	12.17
Intel	72/12/15	6329	0.096	2.894	-0.59	8.81	-35.06	23.41
3M	62/7/3	8938	0.041	1.403	-1.05	27.03	-30.08	10.92
Microsoft	86/3/14	2985	0.171	2.443	-1.10	19.65	-35.83	16.53
Citi-Grp	86/10/30	2825	0.102	2.128	-0.44	10.68	-24.51	18.86
(c) Monthly simple returns (%)								
VW	26/1	864	0.99	5.49	0.23	8.13	-29.00	38.28
EW	26/1	864	1.32	7.54	1.65	15.24	-31.23	65.51
I.B.M.	26/1	864	1.42	6.70	0.17	1.94	-26.19	35.12
Intel	72/12	300	2.86	12.95	0.59	3.29	-44.87	62.50
3M	46/2	623	1.36	6.46	0.16	0.89	-27.83	25.77
Microsoft	86/4	141	4.26	10.96	0.81	2.32	-24.91	51.55
Citi-Grp	86/11	134	2.55	9.17	-0.14	0.47	-26.46	26.08
(d) Monthly log returns (%)								
VW	26/1	864	0.83	5.48	-0.53	7.31	-34.25	32.41
EW	26/1	864	1.04	7.24	0.34	8.91	-37.44	50.38
I.B.M.	26/1	864	1.19	6.63	-0.22	2.05	-30.37	30.10
Intel	72/12	300	2.03	12.63	-0.32	3.20	-59.54	48.55
3M	46/2	623	1.15	6.39	-0.14	1.32	-32.61	22.92
Microsoft	86/4	141	3.64	10.29	0.29	1.32	-28.64	41.58
Citi-Grp	86/11	134	2.11	9.11	-0.50	1.14	-30.73	23.18

Observações marcantes:

- 1) Retornos diários têm maior excesso de retorno (peso na cauda) que retornos mensais;

- 2) Para dados mensais, o retorno de mercado tem maior excesso de retorno em relação aos ativos individuais;
- 3) A média para retornos diários é muito próxima de zero e para retornos mensais é ligeiramente maior;
- 4) Retornos mensais têm maior desvio-padrão que retornos diários;
- 5) Para dados diários, o desvio-padrão para o retorno de mercado é menor que para ativos individuais e que está de acordo com o senso comum;
- 6) Não há problema de assimetria;
- 7) As diferenças entre retornos simples e log retornos não são tão substanciais.
- 8) Os valores extremos máximos e mínimos podem ser muito grandes. Retornos extremos negativos são importantes para ver o risco do negócio e os retornos extremos positivos são críticos para manter uma posição no curto prazo.



**Figure 1.4.** Comparison of empirical and normal densities for the monthly simple and log returns of IBM stock. The sample period is from January 1926 to December 1997. The left plot is for simple returns and the right plot for log returns. The normal density, shown by the dashed line, uses the sample mean and standard deviation given in Table 1.2.

A hipótese de normalidade é questionável. Tem maior massa próxima da média e uma cauda mais pesada que a distribuição normal.

### **Exercícios:**

Fazer exercícios do livro Tsay (2005) da pag. 22-23

Base de dados disponível em:

Web page for Analysis of Financial Time Series (Ruey S. Tsay, Wiley 2005 Financial Engineering, second edition) ISBN 0-471-69074-0

<http://faculty.chicagogsb.edu/ruey.tsay/teaching/fts2/>